Dumairy

Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi

[illegible] Kedua

[illegible]omi UII
31000001960008

BPFE
YOGYAKARTA

Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi

Coebaedi

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Dumairy

MILIK PERPUSTAKAAN FE-UII

No. Klas.	519/Dum/ m.8
No. Inven.	3100001960008
Tanggal	9 April 2013

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi

edisi kedua

BPFE
YOGYAKARTA

Kutipan Pasal 44:
Sanksi Pelanggaran Undang-undang Hak Cipta 1987

1. Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi izin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp100.000.000,00 (seratus juta rupiah).
2. Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp50.000.000,00 (lima puluh juta rupiah).

ISBN 979-503-828-0

MATEMATIKA TERAPAN untuk BISNIS DAN EKONOMI

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, Juni 1983
Cetakan Kedua, Januari 1984
Cetakan Ketiga Februari 1985
Cetakan Keempat, Desember 1986
Cetakan Kelima, Oktober 1988
Cetakan Keenam, November 1989
Cetakan Ketujuh, Mei 1990
Edisi Kedua
Cetakan Pertama, April 1991
Cetakan Kedua, November 1991
Cetakan Ketiga, Oktober 1992
Cetakan Keempat, September 1993
Cetakan Kelima, April 1995
Cetakan Keenam, April 1996

Oleh:
Dumairy

© Hak cipta ada pada penulis. Mereproduksi buku ini, tanpa izin tertulis dari penulis, sebagian atau seluruhnya, dalam bentuk apapun, merupakan pelanggaran hukum!

Dicetak & Diterbitkan
BPFE-YOGYAKARTA
Yogyakarta
Anggota IKAPI
No-003

Rumus Persamaan penurunan

$Qs = a + bP$

$P = 2, 4, 6, 8, 10$

$Q = 14, 19, 24, 29, 30$

Buat:

Ning Dumairy
Ismael Gibraltar
Muammar Bazargan
Magistrani Aprizky

ravilubis13
ranjarngr

PENGANTAR

Sejak penerbitan edisi perdananya pada tahun 1983, buku ini telah enam kali dicetak ulang. Tujuh kali cetak dalam waktu delapan tahun merupakan bukti betapa buku ini semakin luas digunakan. Penggunaannya yang kian meluas itulah yang mendorong penulis untuk melakukan pelengkapan dan perbaikan.

Dalam edisi kedua ini, bukan saja jumlah babnya bertambah, tetapi materi dan bahasan pada hampir semua bab pun diperluas dan diperdalam. Peningkatan yang dilakukan bukan pula hanya mengenai penyajian konsep-konsep matematik murninya, tetapi juga dalam hal penyuguhan kasus-kasus penerapannya di bidang bisnis dan ekonomi. Ini semua dimaksudkan demi lebih memuaskan pengguna buku ini, baik para mahasiswa untuk keperluan belajar, maupun para dosen untuk keperluan mengajar.

Secara material dan struktural, buku ini mengalami peningkatan dan perombakan besar. Jika edisi pertama hanya berisi 12 bab, maka dalam edisi kedua ini terdapat 15 bab. Materi "sistem bilangan" dan "limit" yang semula hanya merupakan sub-bab, kini masing-masing berdiri sebagai bab tersendiri; tentu saja dengan uraian yang lebih mendasar dan luas. Bab tambahan lainnya adalah konsep "teori permainan" *(game theory)*, tampil sebagai bab ke-15. Materi mengenai fungsi linear, fungsi non-linear, kalkulus diferensial, matriks dan programasi linear (sekarang menjadi Bab-bab 6, 7, 9, 10, 12 dan 14) kini diuraikan secara lebih terinci; dengan pengenalan konsep-konsep matematik murninya secara lebih fundamental dan penerapan bisnis-ekonominya yang lebih beragam.

Sejumlah materi baru turut memperkaya edisi kali ini. Mereka antara lain adalah penyelidikan mengenai simetri, perpanjangan, asimtot dan faktorisasi sebuah fungsi (Bab 5); penerapan fungsi linear dalam analisis IS-LM (Bab 6); model *Gompertzian*, kurva belajar dan kurva efisiensi *Wright* (Bab 7); serta konsep limit sisi-kiri, limit sisi-kanan dan kesinambungan (Bab 8). Dalam topik kalkulus diferensial (Bab 9 dan Bab 10) diungkapkan hakekat defivatif, penyidikan titik ekstrem dengan uji tanda *(sign test)*, serta optimisasi dengan metode *Kuhn-Tucker*. Bab 12 yang membahas matriks kini dilengkapi dengan konsep matriks partisi dan eliminasi *Gaussian*. Sedangkan Bab 14 yang membahas programasi linear kini dilengkapi dengan penyelesaian secara aljabar, serta dua model tablo untuk penyelesaian secara simplex.

Meskipun edisi kedua ini lebih tebal, tidaklah berarti (bagi dosen pengajar) semua bab atau materi harus diuraikan di kelas. Bab-bab atau materi tertentu cukup ditugaskan kepada mahasiswa untuk dibaca dan dipelajari sendiri, atau didiskusikan di dalam kelas asistensi. Hal ini mengingat karena materinya memang relatif sederhana, pernah diajarkan di sekolah menengah tingkat atas. Materi-materi yang sederhana demikian sengaja masih tetap disajikan di dalam buku ini, sekadar sebagai "catatan penyegar" guna membantu memahami keseluruhan isi buku secara bertahap.

Dalam menggunakan buku ini untuk matakuliah "Matematika", pengajar perlu selektif menentukan materi-materi yang hendak dibahas di dalam kelas, sesuai dengan strata pendidikan dan program studi yang diasuh. Harus dibedakan antara materi untuk jenjang S0 (akademi, non-gelar) dan jenjang S1 (fakultas, sekolah tinggi). Bahkan untuk jenjang S1 pun perlu dibedakan antara untuk bagian/jurusan akuntansi, manajemen, serta (ilmu ekonomi dan) studi pembangunan; tergantung apakah di situ matakuliah ini diajarkan hanya satu semester (Matematika I) ataukah dua semester (Matematika I dan Matematika II).

Seperti halnya edisi pertamanya, edisi kedua buku ini juga dirancang sedemikian rupa sehingga tidak saja bermanfaat bagi mahasiswa ekonomi yang tengah menempuh matakuliah Matematika, tetapi juga bagi mereka yang tengah menempuh matakuliah Ekonomika Mikro dan Ekonomika Makro. Begitu pula bagi mereka yang menempuh matakuliah Metoda Kuantitatif *(Operations Research)*. Bahkan, karena contoh-contoh kasus bisnisnya yang demikian beragam, buku ini layak pula menjadi pegangan dasar bagi mahasiswa Program M.B.A. yang berlatar belakang S1 bukan dari fakultas ekonomi.

Meskipun pelengkapan dan perbaikan telah dilakukan, bukanlah mustahil pepatah "tiada gading yang tak retak" masih berlaku untuk edisi ini. Kegadingan buku ini semata-mata adalah berkat karunia-Nya, sedangkan keretakan yang ada sepenuhnya bersumber dari dan merupakan tanggung jawab penulis.

Yogya, April 1991

Dy

PENGANTAR EDISI PERTAMA

Matematik merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dengan menggunakan bahasa matematik, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisa dan dipecahkan. Sebagai sebuah ilmu yang senantiasa berkembang, ekonomi tak luput dari hasrat untuk menerapkan matematika dalam bahasan-bahasannya. Berbagai konsep matematika kini menjadi alat analisis yang penting dalam ilmu ekonomi. Ilmu ekonomi modern memang cenderung menjadi semakin matematis.

Buku ini berisi uraian mengenai penerapan konsep-konsep matematika dalam bidang bisnis dan ekonomi. Materi disusun berdasarkan kebutuhan atau rencana kuliah matematika selama dua semester pada fakultas-fakultas ekonomi, sekolah tinggi ekonomi dan akademi-akademi yang mengajarkan ilmu yang berkaitan dengan bidang bisnis dan ekonomi. Materi buku ini bahkan telah diterapkan dalam pengajaran matematika pada Fakultas Ekonomi Universitas Gadjah Mada, sejumlah fakultas ekonomi universitas swasta dan akademi-akademi sejenis di Yogyakarta. Setiap bab diawali dengan uraian mengenai model-model matematika murni, disusul dengan penjelasan ringkas tentang logika dari konsep-konsep ekonomi yang menerapkan model tersebut, kemudian penerapan model matematika itu sendiri dalam konsep ekonomi yang bersangkutan beserta contoh-contoh praktisnya. Dengan cara penyajian demikian diharapkan konsumen buku ini dapat secara bertahap dan sistematis memahami konsep matematika murninya, logika ekonominya dan kemudian penerapan model/konsep matematika tersebut dalam bidang ekonomi.

Bagian pertama buku berisi konsep-konsep dasar matematika. Teori himpunan, deret, pangkat, akar dan logaritma tersaji di sini; berikut penerapan ekonominya seperti dalam analisis perkembangan usaha, analisis pertumbuhan penduduk dan teori nilai uang. Bagian kedua menguraikan tentang fungsi. Berbagai model ekonomi baik yang linear maupun non-linear digambarkan pada bagian ini seperti model fungsi permintaan, fungsi penawaran, fungsi biaya, fungsi penerimaan, fungsi produksi, fungsi utilitas, fungsi konsumsi, fungsi tabungan, fungsi investasi, fungsi pajak dan fungsi impor. Begitu juga berbagai analisis yang berhubungan dengannya seperti analisis keseimbangan pasar, pengaruh pajak dan subsidi, analisis keuntungan maksimum dan analisis pendapatan nasional.

Selanjutnya bagian ketiga menguraikan tentang kalkulus - diferensial dan integral - serta penerapan konsep kalkulus tersebut dalam berbagai analisis dan model pengambilan keputusan ekonomi. Bagian keempat berisi aljabar linear;

konsep-konsep matriks serta peranannya dalam analisis input-output dan programasi linear diuraikan pada bagian ini. Terakhir, bagian kelima memuat sebanyak seratus soal-jawab penerapan matematika dalam bidang bisnis dan ekonomi. Bagian terakhir ini dapat disajikan sarana bagi para mahasiswa untuk pemahaman lebih lanjut analisis ekonomi secara matematika. Di samping soal-jawab terapan, dalam buku ini terdapat pula sejumlah soal-soal matematika murni - yang kunci jawabannya tersedia di halaman-halaman akhir - sebagai bahan atau sarana latihan.

Buku ini juga dirancang sedemikian rupa sehingga tidak saja bermanfaat bagi mahasiswa ekonomi yang tengah menempuh kuliah matematika, tetapi juga bagi mahasiswa yang sedang menempuh kuliah ekonomi mikro dan ekonomi makro. Mahasiswa yang berminat memahami kedua matakuliah tersebut secara kuantitatif-matematis, dapat menggunakan buku ini sebagai pelengkap acuan, mengingat penerapan matematika dalam ekonomi tak lain adalah penerapannya dalam ekonomi mikro dan ekonomi makro.

Tidak sedikit sejawat yang secara langsung maupun tak langsung turut memungkinkan tersusunnya buku ini, terutama sesama rekan dosen pada Fakultas Ekonomi Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta. Begitu pula para mahasiswa yang sempat mengemukakan kritik dan koreksi ketika materi buku ini disampaikan masih dalam bentuk konsep, dalam forum kuliah. Akhirnya, semua kebenaran yang terkandung di dalam buku ini semata-mata hanyalah berkat kemurahan-Nya dalam menuntun penulis menuju kebenaran, sedangkan segala kekeliruan yang terdapat di sini sepenuhnya bersumber dari dan menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, April 1983

Dy

PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

Mengingat tebalnya buku, pengajar perlu selektif menentukan materi-materi yang hendak dibahas di dalam kelas, sesuai dengan strata pendidikan dan program studi yang diasuh. Harus dibedakan antara materi untuk jenjang D3 atau S0 (akademi, program nongelar) dan jenjang S1 (fakultas, sekolah tinggi, program gelar), tergantung apakah mata kuliah "Matematika" diajarkan hanya satu semester ataukah dua semester (Matematika I dan Matematika II). Berikut disampaikan saran penggunaan buku ini, sebagai pedoman dalam pengajaran mata kuliah matematika.

TINGKATAN D3 ATAU S0
(Program Tanpagelar)
satu semester

Bab 4
Bab 5 [s.d. Sub-bab 5.3]
Bab 6 [s.d. Seksi 6.5.10]
Bab 9 [s.d. Seksi 9.6.6]
Bab 11

Mahasiswa diwajibkan mempelajari sendiri Bab 1, 2, dan 3; atau dibahas dalam kelas asistensi.

TINGKATAN S1
(Jurusan Akuntansi)
satu semester

Bab 5
Bab 6 [hanya s.d. Seksi 6.5.10]
Bab 7 [hanya s.d. Seksi 7.3.8]
Bab 9 [9.1 dan 9.3 *optional*]
Bab 10 [Sub-bab 10.5 *optional*]
Bab 11 [hanya s.d. Seksi 11.3.5)
Bab 12 [12.4 dan 12.6 *optional*]

Mahasiswa diwajibkan mempelajari sendiri Bab 1, 2, 3, dan 4; atau dibahas dalam kelas asistensi.

TINGKATAN S1
(Jurusan Manajemen dan Jurusan Studi Pembangunan)
mata kuliah Matematika diajarkan dua semester

Matematika I

Bab 1
Bab 4
Bab 5
Bab 6
Bab 7
Bab 8
Bab 9

Bab 2 dan 3 untuk dipelajari sendiri oleh mahasiswa, atau dibahas di kelas asistensi. Antara Bab 9 dan Bab 10 bisa bertukar semester.

Matematika II

Bab 10
Bab 11
Bab 12
Bab 13
Bab 14
Bab 15

Bab 15 (Teori Permainan) bersifat *optional*, diajarkan jika waktu masih tersedia; atau diganti dengan materi Persamaan Diferensi/Diferensial.

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN UNTUK BISNIS DAN EKONOMI

Edisi Soal-Jawab

Buku ini dilengkapi dengan buku soal-jawab, dijilid terpisah; berisi puluhan soal-jawab penerapan matematika dalam bisnis dan ekonomi, dengan langkah-langkah penyelesaiannya serta berbagai siasat untuk memecahkan soal-soal yang sebagian data/informasinya tersembunyi. Di situ juga terlampir jawaban soal-soal ujian sisipan dan ujian akhir "Matematika I" serta "Matematika II", yang pernah diujikan oleh penulis di Fakultas Ekonomi UGM.

Buku soal-jawab pelengkap tersebut sangat berguna sebagai sarana latihan, dan tidak beredar di pasar umum. Anda dapat memperolehnya dengan mengisi dan mengirimkan formulir terlampir di sebelah. Pesanan ditujukan langsung ke alamat:

- **D u m a i r y**
  Fakultas Ekonomi Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
- **BPFE-Yogyakarta**
  Fakultas Ekonomi Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
  atau
  Jl. Gambiran No. 37, Yogyakarta
- **Penyalur-penyalur resmi BPFE-Yogyakarta.**

- Pesanan harus dilakukan dengan menggunakan formulir asli, bukan fotokopiannya, dan dilayani hanya selama persediaan masih ada. Untuk mempercepat pelayanan, bubuhkan kode "MTBE-SJ" pada sudut kiri-atas amplop saudara.

D5-02

№ 062448

BAGIAN SATU
KONSEP-KONSEP DASAR

BAB 1
HIMPUNAN

Teori himpunan bersifat sangat mendasar dalam matematika. Ia melandasi hampir semua cabang ilmu hitung moderen. Berkenaan dengan sifat mendasarnya itu, maka pada bagian awal buku ini terlebih dahulu dibahas hal ikhwal yang berhubungan dengan teori himpunan *(set theory)*.

Dalam kehidupan sehari-hari, tanpa disadari manusia sebenarnya sudah sering menerapkan konsepsi himpunan. Berbagai nama perkumpulan seperti Himpunan Masyarakat Pencinta Buku, Himpunan Mahasiswa Islam, Perhimpunan Ekonomi Pertanian Indonesia dan Himpunan Kerukunan Tani Indonesia, secara tidak disadari sudah merupakan penerapan konsepsi himpunan. Para mahasiswa juga sudah terbiasa mempraktekkannya, misalnya dengan menggolongkan dosen-dosen tertentu (dalam hal pemberian nilai) sebagai dosen keras dan dosen-dosen lainnya sebagai dosen lunak. Bahkan anak-anak kecil pun sudah sering melakukan pembentukan himpunan, misalnya berupa tindakan mengelompokkan mainan-mainan sejenis.

1.1 PENGERTIAN HIMPUNAN

Himpunan adalah suatu kumpulan atau gugusan dari sejumlah obyek. Obyek-obyek yang mengisi atau membentuk sebuah himpunan disebut anggota, atau elemen, atau unsur. Obyek-obyek suatu himpunan sangat bervariasi; bisa berupa orang-orang tertentu, hewan-hewan tertentu, tanam-tanaman tertentu, benda-benda tertentu, buku-buku tertentu, angka-angka tertentu dan sebagainya. Dalam penyajian secara umum himpunan dilambangkan dengan huruf-huruf besar seperti A, B, C, P, Q, R, X, Y atau Z. Sedangkan obyek-

obyek yang menjadi anggota suatu himpunan dilambangkan dengan huruf-huruf kecil seperti a, b, c, p, q, r, x, y atau z.

Penulisan matematis (Notasi) :

$p \in A$ berarti bahwa obyek p adalah merupakan anggota (atau unsur, atau elemen) dari himpunan A.

Jika setiap anggota dari himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan-lain B, dengan perkataan lain $p \in A$ juga $p \in B$, maka A disebut himpunan-bagian *(subset)* dari B.

Notasi :

$A \subset B$ berarti bahwa A merupakan himpunan-bagian dari B.

Dua buah himpunan dikatakan sama atau sederajat apabila semua anggota dari himpunan yang satu juga merupakan anggota-anggota bagi himpunan yang lain, dengan perkataan lain jumlah dan jenis anggota-anggota kedua himpunan tersebut sama.

Notasi :

$A = B$ berarti bahwa himpunan A sama dengan himpunan B, yakni jika dan hanya jika $A \subset B$ serta $B \subset A$.

Pernyataan ingkaran atau bantahan terhadap $p \in A$, $A \subset B$ dan $A = B$ masing-masing dituliskan dengan notasi $p \notin A$, $A \not\subset B$ dan $A \neq B$. Dengan demikian, notasi :

$p \notin A$ artinya obyek p bukan merupakan anggota dari himpunan A.
$A \not\subset B$ artinya A bukan merupakan himpunan-bagian dari B.
$A \neq B$ artinya himpunan A tidak sama dengan himpunan B.

1.2 PENYAJIAN HIMPUNAN

Penyajian sebuah himpunan dapat dituliskan dengan dua macam cara, *cara daftar* dan *cara kaidah*. Cara daftar ialah dengan mencantumkan seluruh obyek yang menjadi anggota suatu himpunan; sebagai contoh :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

berarti himpunan A beranggotakan bilangan-bilangan bulat positif 1, 2, 3, 4 dan 5.

Adapun cara kaidah ialah dengan menyebutkan karakteristik tertentu dari obyek-obyek yang menjadi anggota himpunan tersebut; sebagai contoh :

$A = \{x; 0 < x < 6\}$

berarti himpunan A beranggotakan obyek x, di mana x adalah bilangan-bilangan bulat positif yang lebih besar dari nol tetapi lebih kecil dari enam.

Untuk himpunan A di atas, penyajiannya secara kaidah dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$A = \{x; 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

berarti himpunan A beranggotakan obyek x yang harganya paling sedikit sama dengan satu dan paling banyak sama dengan lima.

1.3 HIMPUNAN UNIVERSAL DAN HIMPUNAN KOSONG

Kecuali dinyatakan lain, setiap himpunan tertentu dianggap terdiri dari beberapa himpunan-bagian yang masing-masing mempunyai anggota. Himpunan "besar" tadi dinamakan himpunan universal, atau sering disebut dengan himpunan saja, dan dalam penulisannya dilambangkan dengan notasi U. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai satu anggotapun, biasanya dilambangkan dengan notasi $\{\ \}$ atau $\emptyset$. Secara teoretik, himpunan kosong adalah merupakan himpunan-bagian dari setiap himpunan apapun.

Berdasarkan adanya konsep himpunan universal yang merupakan induk bagi semua himpunan, dan himpunan kosong yang merupakan himpunan-bagian dari setiap himpunan, maka terhadap setiap himpunan tertentu (misalkan A) berlaku ketentuan : $\emptyset \subset A \subset U$.

Guna memperoleh pemahaman yang lebih jelas tentang pengertian-pengertian dasar himpunan, berikut ini disajikan beberapa ilustrasi.

Andaikan kita memiliki data beberapa himpunan sebagai berikut :

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Kesimpulan yang bisa ditarik berkenaan data di atas adalah :

$x \in U$ di mana $0 \leqslant x \leqslant 9$
$y \in A$ di mana $0 \leqslant y \leqslant 4$
$z \in B$ di mana $5 \leqslant z \leqslant 9$
$y \in C$ di mana $0 \leqslant y \leqslant 4$

$A \subset U$,	$B \subset U$	dan	$C \subset U$
$A = C$,	$A \neq B$	dan	$B \neq C$

$y \in A$ dan juga $y \in C$, maka $A \subset C$ dan $C \subset A$
$y \notin B$, dan di lain pihak $z \notin A$ serta $z \notin C$

$\varnothing \subset A$,	$\varnothing \subset B$,	$\varnothing \subset C$	dan	$\varnothing \subset U$
$\varnothing \subset A \subset U$,	$\varnothing \subset B \subset U$		dan	$\varnothing \subset C \subset U$.

1.4 OPERASI HIMPUNAN : GABUNGAN, IRISAN, SELISIH DAN PELENGKAP

Di bawah ini diuraikan beberapa "aturan main" dalam pengoperasian himpunan; dalam hubungannya dengan gabungan, irisan dan selisih dari dua buah himpunan, serta pelengkap sebuah himpunan.

Gabungan *(union)* dari himpunan A dan himpunan B, dituliskan dengan notasi $A \cup B$, adalah himpunan yang beranggotakan obyek-obyek milik A atau obyek-obyek milik B.

$$\boxed{A \cup B = \{ x;\ x \in A \text{ atau } x \in B \}}$$

Irisan *(intersection)* dari himpunan A dan himpunan B, dituliskan dengan notasi $A \cap B$, adalah himpunan yang beranggotakan baik obyek milik A maupun obyek milik B; dengan perkataan lain, beranggotakan obyek-obyek yang dimiliki oleh A dan B secara bersama.

$$\boxed{A \cap B = \{ x;\ x \in A \text{ dan } x \in B \}}$$

Dalam hal $A \cap B = \varnothing$, yakni jika A dan B tidak mempunyai satupun anggota yang dimiliki bersama, maka A dan B dikatakan disjoin *(disjoint)*.

Selisih dari himpunan A dan himpunan B, dituliskan dengan notasi $A - B$ atau $A|B$, adalah himpunan yang beranggotakan obyek-obyek milik A yang bukan obyek milik B.

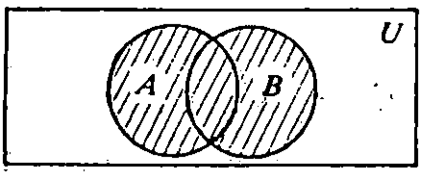
$$\boxed{A - B \equiv A|B = \{ x;\ x \in A \text{ tetapi } x \notin B \}}$$

Pelengkap *(complement)* dari sebuah himpunan A, dituliskan dengan notasi $\overline{A}$, adalah himpunan yang beranggotakan obyek-obyek yang tidak dimiliki oleh A;

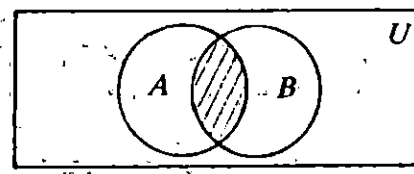
dengan perkataan lain, $\bar{A}$ adalah sama dengan selisih antara himpunan universal U dan himpunan A.

$$\boxed{\bar{A} = \{ x;\ x \in U \text{ tetapi } x \notin A \} = U - A}$$

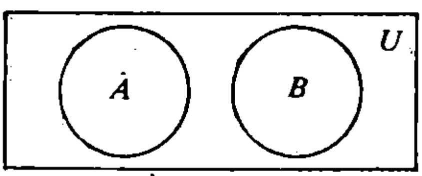
"Aturan main" dalam pengoperasian himpunan ini akan lebih mudah dipahami dengan bantuan Diagram *Venn* sebagaimana digambarkan berikut :



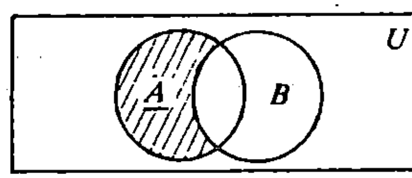
$A \cup B$ = bagian yang diarsir



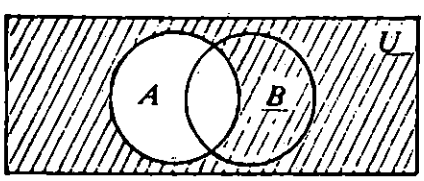
$A \cap B$ = bagian yang diarsir



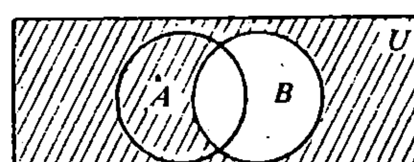
$A \cap B = \emptyset$



$A - B$ = bagian yang diarsir



$\bar{A}$ = bagian yang diarsir



$\bar{B}$ = bagian yang diarsir

Gambar 1-1

Berikut ini disajikan sedikit ilustrasi berkenaan dengan "aturan main" dalam pengoperasian himpunan.

Anggaplah kita mempunyai himpunan-himpunan berikut :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$Q = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$R = \{6, 7, 8, 9\}$

Maka :

$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$P \cup R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U$
$Q \cup R = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P \cap Q = \{4, 5\}$
$P \cap R = \{\ \} = \varnothing$
$Q \cap R = \{6, 7, 8\}$

$P - Q = \{1, 2, 3\}$
$P - R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$Q - R = \{4, 5\}$

$\bar{P} = \{6, 7, 8, 9\} = U - P$

$\bar{Q} = \{1, 2, 3, 9\} = U - Q$

$\bar{R} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = U - R$

1.5 KAIDAH-KAIDAH MATEMATIKA DALAM PENGOPERASIAN HIMPUNAN

Dalam pengoperasian lebih lanjut teori himpunan, berlaku beberapa kaidah matematika sebagaimana terinci di dalam daftar berikut :

Kaidah-kaidah Matematika dalam Pengoperasian Himpunan	
Kaidah Idempoten	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Kaidah Asosiatif	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kaidah Komutatif	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Kaidah Distributif	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Kaidah Identitas	
5a. $A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap U = A$
Kaidah Kelengkapan	
7a. $A \cup \bar{A} = U$	7b. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
8a. $\overline{(\bar{A})} = A$	8b. $\bar{U} = \varnothing$, $\bar{\varnothing} = U$
Kaidah De Morgan	
9a. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$	9b. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Selanjutnya daftar di bawah ini menampilkan kembali berbagai lambang yang digunakan dalam teori himpunan, beserta artinya.

Lambang-lambang dalam Teori Himpunan dan Artinya			
No.	**Lambang**	**A r t i**	**Contoh Penggunaan**
1.	$\in$	anggota *(element)*	$x \in A$: obyek x adalah anggota dari himpunan A
2.	$\subset$	himpunan-bagian (*subset*)	$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B
3.	$\cup$	gabungan (*union*)	$A \cup B$: gabungan antara A dan B
4.	$\cap$	irisan *(intersection)*	$A \cap B$: irisan antara A dan B
5.	—	selisih	$A - B$: selisih antara A dikurangi B
6.	$\bar{A}$ [a]	pelengkap A	A = bilangan positif $\bar{A}$ = bilangan negatif
7.	U [b]	himpunan universal	
8.	$\emptyset$ [c]	himpunan kosong	

a) sering juga dituliskan dengan notasi A^c

b) ada pula yang melambangkan dengan S

c) sering juga dituliskan dengan notasi { }

Latihan Himpunan

1. Gambarkan sebuah diagram Venn untuk menunjukkan himpunan universal U dan himpunan-himpunan-bagian A serta B jika :

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{1, 3, 4, 7, 8\}$$

Kemudian selesaikan :

(a) $A - B$ (c) $A \cap B$ (e) $A \cap \bar{B}$
(b) $B - A$ (d) $A \cup B$ (f) $B \cap \bar{A}$

2. Gambarkan sebuah diagram Venn yang menunjukkan himpunan universal U serta himpunan-himpunan-bagian A dan B untuk :

$$U = \{x; 3 < x < 14\}$$
$$A = \{6, 7, 9, 10, 13\}$$
$$B = \{4, 5, 11\}$$

Kemudian selesaikan :

(a) $A - B$ (c) $A \cap B$ (e) $A \cup B$
(b) $B - A$ (d) $A \cap \bar{B}$ (f) $A \cup \bar{B}$

3. Andaikan
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$
$$B = \{3, 4, 6, 7, 13\}$$
$$C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 13\}$$

Gambarkan diagram Venn-nya kemudian selesaikan :

(a) $A \cap B$ (d) $A \cup B$ (g) $(A \cup B) \cap C$
(b) $B \cap C$ (e) $A \cup B \cup C$ (h) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$
(c) $C \cap A$ (f) $A \cap B \cap C$ (i) $A \cap B \cap \bar{C}$

Untuk soal-soal nomor 4 sampai dengan nomor 8 berikut, andaikan himpunan universal $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sedangkan $P = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $Q = \{0, 5, 9\}$ serta $R = \{3, 7, 9\}$. Tanpa menggunakan diagram Venn, tentukan :

4. (a) $\bar{P}$ (0,1,3,5,7,8,9) (b) $\bar{Q}$ (1,2,3,4,6,7,8) (c) $\bar{R}$ (0,1,2,4,5,6,8)

5. (a) $P \cap Q$ ( ) (c) $P \cap R$ ( ) (e) $Q \cap R$ (9)
(b) $P \cup Q$ (0,2,4,5,6,8,9) (d) $P \cup R$ (2,3,4,6,7,8,9) (f) $Q \cup R$ (0,3,5,7,9)

6. (a) $P - Q$ (2,4,6,9) (c) $P \cap \bar{Q}$ (2,4,6,8) (e) $P - (Q - R)$
(b) $Q - P$ (0,5,9) (d) $\bar{P} \cap Q$ (0,5,9) (f) $(P - Q) - R$

7. (a) $P \cup (Q \cap R)$ (c) $(P \cup Q) \cap (P \cup R)$
(b) $P \cap (Q \cup R)$ (d) $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$

8. (a) $\bar{P} \cup \bar{Q}$ (c) $\bar{P} \cap \bar{Q}$
(b) $(\overline{P \cup Q})$ = $\bar{P} \cap \bar{Q}$ (d) $(\overline{P \cap Q})$ ($\bar{P} \cup \bar{Q}$)

9. Berdasarkan hukum-hukum matematika dalam pengoperasian himpunan, sebagaimana tercantum pada daftar di muka, sederhanakanlah pernyataan-pernyataan himpunan berikut :

   $(B \cup B) \cup A = B \cup A$

   (a) $B \cup (B \cup A) =$ (b) $A \cup (\bar{A} \cap B)$ $(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B)$
   $= A \cup B$

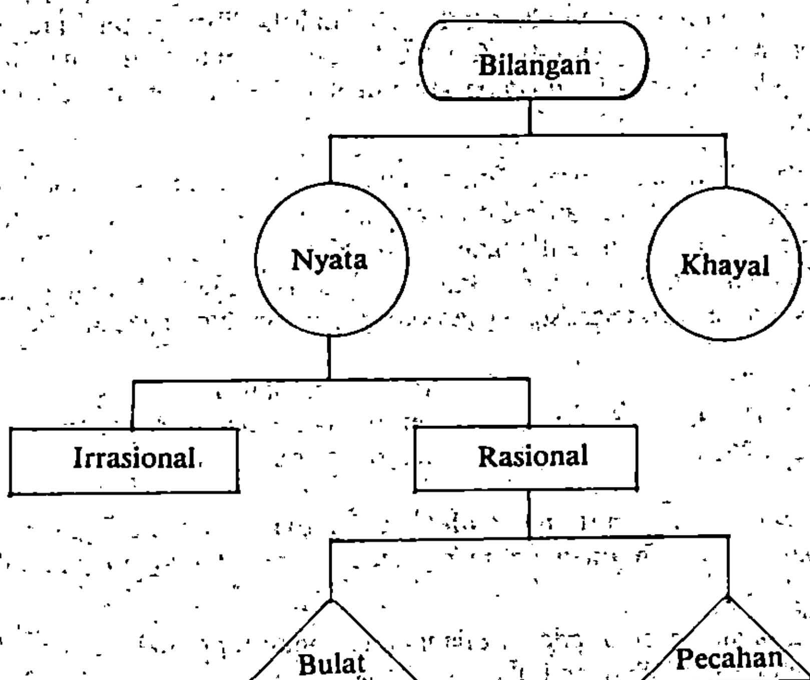
10. Apabila U adalah sebuah himpunan universal, tentukan mana yang benar dan yang salah di antara pernyataan-pernyataan di bawah ini :

(a) $A \cup \bar{A} = U$ ✓	(e) $C \cup \varnothing = C$ ✓	(i) $\overline{(\bar{B})} = U$ ×
(b) $A \cap \bar{A} = A$ × $\varnothing$	(f) $C \cap C = \varnothing$ ×	(j) $(A - C) \cup C = A - C$ ×
(c) $B \cap U = B$ ✓	(g) $D \cap \varnothing = \varnothing$ ✓	(k) $B \cap (B - D) = B \cup D$ ×
(d) $B \cup U = U$ ✓	(h) $D \cap D = D$ ✓	(l) $(A \cup D) - D = A - D$ ✓

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

BAB 2
SISTEM BILANGAN

Dalam matematika, bilangan-bilangan yang ada dapat digolongkan sebagaimana terurai di dalam Skema 1 berikut :



Skema 1 : Pembagian Jenis Bilangan

Bilangan nyata dapat positif maupun negatif. Bilangan khayal adalah bilangan yang berupa akar pangkat genap dari suatu bilangan negatif. Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini ialah bahwa bilangan nyata mengandung salah satu "sifat" secara tegas yaitu : atau positif atau negatif, dan tidak keduaduanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah positif ataukah negatif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus, disebut bilangan kompleks.

Contoh bilangan nyata : 2; -2; 1,1; -1,1

Contoh bilangan khayal : $\sqrt{(-4)} \stackrel{?}{=} \pm 2$; $\sqrt[4]{(-1{,}4641)} \stackrel{?}{=} \pm 1{,}1$

Pada dasarnya setiap bilangan, positif ataupun negatif, jika berpangkat genap akan selalu menghasilkan bilangan positif. Dengan demikian sukar sekali dibayangkan bagaimana hasil akhir dari suatu bilangan negatif yang berada di bawah tanda akar berpangkat genap. Oleh karenanya bilangan seperti itu dinamakan bilangan khayal.

Bilangan rasional adalah hasilbagi antara dua bilangan, yang berupa bilangan bulat; atau berupa pecahan dengan desimal terbatas, atau desimal berulang. Sedangkan bilangan irrasional adalah hasilbagi antara dua bilangan, berupa pecahan dengan desimal tak terbatas dan tak berulang, termasuk bilangan π dan bilangan e. Bilangan bulat adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya bulat, termasuk 0 (nol). Bilangan pecahan adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang.

Berdasarkan pembatasan di atas, maka yang membedakan apakah sesuatu bilangan tergolong bilangan rasional ataukah bilangan irrasional ialah faktor "keterbatasan" dan "keberulangan" desimalnya. Adapun perbedaan antara bilangan bulat dan bilangan pecahan (keduanya tergolong bilangan rasional) kiranya sudah cukup jelas, sehingga tidak perlu lagi diterangkan.

0,1492525	tergolong bilangan rasional
0,1492525393993999-----	tergolong bilangan irrasional
0,149262626	tergolong bilangan rasional

Dengan menggunakan pendekatan teori himpunan, pernyataan-pernyataan di bawah ini akan memperjelas penggolong-golongan bilangan tersebut.

— Semua bilangan bulat adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan bulat.

— Semua bilangan pecahan adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan pecahan.

— Semua bilangan irrasional adalah bilangan berdesimal, tapi tidak semua bilangan berdesimal adalah bilangan irrasional.

Selain jenis-jenis bilangan sebagaimana terurai pada skema di muka, masih terdapat lagi tiga jenis bilangan yang menyangkut bilangan bulat positif. Mereka adalah *bilangan asli, bilangan cacah* dan *bilangan prima*.

Bilangan asli ialah semua bilangan bulat positif, tidak termasuk nol. Seandainya himpunan bilangan asli kita lambangkan dengan notasi A, maka : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots$ dan seterusnya $\}$.

Bilangan cacah ialah semua bilangan bulat positif atau nol. Jika himpunan bilangan cacah kita lambangkan dengan notasi C, maka : $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots$ dan seterusnya $\}$.

Bilangan prima ialah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan hanya "habis" (maksudnya bulat) dibagi oleh dirinya sendiri. Jika himpunan bilangan prima dilambangkan dengan notasi P, maka : $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\ldots\ldots$ dan seterusnya $\}$.

2.1 HUBUNGAN PERBANDINGAN ANTARBILANGAN

Sekarang marilah kita bahas bagaimana bilangan-bilangan nyata saling berhubungan satu sama lain secara relatif. Dalam hal ini kita akan bekerja dengan empat macam tanda ketidaksamaan, yang secara sepintas sebenarnya sudah kita temukan pada Sub-bab 1.2 di muka. Tanda-tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah sebagai berikut :

Tanda $<$ melambangkan "lebih kecil dari"
Tanda $>$ melambangkan "lebih besar dari"
Tanda $\leq$ melambangkan "lebih kecil dari atau sama dengan"
Tanda $\geq$ melambangkan "lebih besar dari atau sama dengan"

Bilangan-bilangan nyata mempunyai sifat-sifat hubungan perbandingan sebagai berikut :

1. Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$
   sedangkan jika $a \geq b$, maka $-a \leq -b$
2. Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$
   sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \geq x.b$
3. Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$
   sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \leq x.b$
4. Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a + c \leq b + d$
   sedangkan jika $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a + c \geq b + d$

Keberlakuan sifat-sifat di atas dapat dilihat dari pembuktian pada contoh-contoh di bawah ini.

Untuk sifat ke-1 :

Andaikan $a = 4$ dan $b = 6$, maka $a < b$ sebab $4 < 6$ dan $-a > -b$ sebab $-4 > -6$. Sedangkan jika $a = 8$ dan $b = 6$, maka $a > b$ sebab $8 > 6$ dan $-a < -b$ sebab $-8 < -6$;

Untuk sifat ke-2 :

Andaikan $a = 4$ dan $b = 6$ serta $x = 3$, maka $x.a < x.b$ sebab $3.4 = 12 < 3.6 = 18$. Sedangkan jika $a = 8$ dan $b = 6$ serta $x = 3$, maka $x.a > x.b$ sebab $3.8 = 24 > 3.6 = 18$.

Untuk sifat ke-3 :

Andaikan $a = 4$ dan $b = 6$ serta $x = -3$. maka $x.a > x.b$ sebab $(-3)4 = -12 > (-3)6 = -18$. Sedangkan jika $a = 8$ dan $b = 6$ serta $x = -3$, maka $x.a < x.b$ sebab $(-3)\,8 = -24 < (-3)\,6 = -18$.

Untuk sifat ke-4 :

Andaikan $a = 4$ dan $b = 6$ serta $c = 5$ dan $d = 7$, maka $a + c < b + d$ sebab $4 + 5 = 9 < 6 + 7 = 13$. Sedangkan jika $a = 8$ dan $b = 6$ serta $c = 5$ dan $d = 3$, maka $a + c > b + d$ sebab $8 + 5 = 13 > 6 + 3 = 9$.

2.2 OPERASI BILANGAN

Bilangan-bilangan nyata memenuhi kaidah-kaidah tertentu apabila mereka dioperasikan. Operasi penjumlahan dan perkalian bilangan nyata memenuhi kaidah-kaidah sebagai berikut :

1. Kaidah Komutatif

Dalam menjumlahkan dua bilangan a dan b, perubahan urutan antara keduanya tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

$$\boxed{a + b = b + a}$$

$$4 + 6 = 6 + 4$$

Hal yang sama berlaku juga untuk perkalian, perubahan urutan perkalian antara dua bilangan tidak akan mengubah hasilnya.

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

$$4 \times 6 = 6 \times 4$$

2. Kaidah Asosiatif

Dalam menjumlahkan tiga bilangan a, b dan c — atau lebih — perubahan cara pengelompokan bilangan-bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

$$(4 + 6) + 5 = 4 + (6 + 5)$$

Begitu pula dalam hal perkalian, perubahan cara pengelompokan bilangan-bilangan tidak akan mengubah hasil perkalian.

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

$$(4 \times 6) \times 5 = 4 \times (6 \times 5)$$

3. Kaidah Pembatalan

Jika jumlah a dan c sama dengan jumlah b dan c, maka a sama dengan b; dengan perkataan lain :

jika	$a + c = b + c$
maka	$a = b$

Jika hasilkali a dan c sama dengan hasilkali b dan c, dimana c adalah bilangan nyata bukan-nol, maka a sama dengan b; jadi :

jika	$ac = bc$	$(c \neq 0)$
maka	$a = b$	

4. Kaidah Distributif

Dalam pengalian bilangan a terhadap jumlah $(b + c)$, hasilkalinya adalah sama dengan jumlah hasilkali $a\,b$ dan hasilkali $a\,c$. Dengan perkataan lain, hasilkali sebuah bilangan terhadap suatu penjumlahan adalah sama dengan jumlah hasilkali-hasilkalinya.

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

$$4(6 + 5) = (4 \times 6) + (4 \times 5)$$

5. Unsur Penyama

Unsur penyama dalam penjumlahan (pengurangan) adalah bilangan nol, sebab jumlah (selisih) antara suatu bilangan tertentu dan 0 adalah bilangan itu sendiri.

$$\boxed{a \pm 0 = a}$$

$$4 \pm 0 = 4$$

Unsur penyama dalam perkalian (pembagian) adalah bilangan satu, sebab hasilkali (hasilbagi) antara suatu bilangan tertentu dan 1 adalah bilangan itu sendiri.

$$\boxed{a \times 1 = a} \qquad \boxed{a : 1 = a}$$

$$4 \times 1 = 4 \qquad 4 : 1 = 4$$

6. Kebalikan

Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah balikan penambah (*additive inverse*); jumlah antara bilangan tertentu dan balikan penambahnya adalah sama dengan nol.

$$\boxed{a + (-a) = 0}$$

$$4 + (-4) = 0$$

Bilangan -4 disebut balikan penambah dari 4 atau negatif dari 4.
Setiap bilangan nyata bukan—nol mempunyai sebuah balikan pengali (*multiplicative inverse*); hasilkali bilangan tertentu terhadap balikan pengalinya adalah sama dengan satu.

$$\boxed{a \times \frac{1}{a} = 1}$$

$$4 \times \frac{1}{4} = 1$$

Bilangan $\frac{1}{4}$ disebut balikan pengali dari 4.

2.3 OPERASI TANDA

Sampai sejauh ini, dalam pengoperasian bilangan kita baru membahas bilangan-bilangan dengan satu macam tanda yakni positif. Sekarang marilah kita bahas bagaimana pengoperasian bilangan-bilangan tersebut berkenaan dengan tanda-tanda yang melekat padanya.

2.3.1 Operasi Penjumlahan

(a) Jumlah dari dua bilangan positif ($+a$) dan ($+b$) adalah sebuah bilangan positif baru ($+c$) yang nilainya lebih besar.

$$\boxed{(+a)+(+b)=(+c)}$$

$$(+4)+(+6)=(+10)$$

(b) Jumlah dari dua bilangan negatif ($-a$) dan ($-b$) adalah sebuah bilangan negatif baru ($-c$) yang nilainya lebih kecil.

$$\boxed{(-a)+(-b)=(-c)}$$

$$(-4)+(-b)=(-10)$$

(c) Jumlah dari bilangan positif ($+a$) dan bilangan negatif ($-b$) adalah bilangan positif ($+c$) jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b, atau bilangan negatif ($-d$) jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b.

$$\boxed{(+a)+(-b)=(+c) \qquad \text{jika} \quad |a|>|b|}$$

$$(+9)+(-6)=(+3)$$

atau

$$\boxed{(+a)+(-b)=(-d) \qquad \text{Jika} \quad |a|<|b|}$$

$$(+4)+(-6)=(-2)$$

(d) Jumlah dari bilangan negatif ($-a$) dan bilangan positif ($+b$) adalah bilangan positif ($+c$) jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b, atau bilangan negatif ($-d$) jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b.

$$\boxed{(-a)+(+b)=(+c) \qquad \text{Jika} \quad |a|<|b|}$$

$$(-4)+(+6)=(+2)$$

atau

$$\boxed{(-a) + (+b) = (-d) \qquad \text{jika} \quad |a| > |b|}$$

$(-9) + (+6) = (-3)$

2.3.2 Operasi Pengurangan

(a) Selisih antara dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$ adalah bilangan positif $(+c)$ jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b, atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b.

$$\boxed{(+a) - (+b) = (+c) \qquad \text{jika} \quad |a| > |b|}$$

$(+9) - (+6) = (+3)$

atau

$$\boxed{(+a) - (+b) = (-d) \qquad \text{jika} \quad |a| < |b|}$$

$(+4) - (+6) = (-2)$

(b) Selisih antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$ adalah bilangan positif $(+c)$ jika harga mutlak a lebih kecil dari harga mutlak b, atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak a lebih besar dari harga mutlak b.

$$\boxed{(-a) - (-b) = (+c) \qquad \text{jika} \quad |a| < |b|}$$

$(-4) - (-6) = (+2)$

atau

$$\boxed{(-a) - (-b) = (-d) \qquad \text{jika} \quad |a| > |b|}$$

$(-9) - (-6) = (-3)$

(c) Selisih antara bilangan positif $(+a)$ dan bilangan negatif $(-b)$ adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$; hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan positif.

$$\boxed{(+a) - (-b) = (+c)}$$

$(+4) - (-6) = (+10)$

(d) Selisih antara bilangan negatif $(-a)$ dan bilangan positif $(+b)$ adalah sebuah bilangan negatif baru $(-c)$; hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan negatif.

$$\boxed{(-a) - (+b) = (-c)}$$

$(-4) - (+6) = (-10)$

2.3.3 Operasi Perkalian

(a) Hasilkali antara dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$, serta antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$, adalah sebuah bilangan positif $(+c)$.

$\boxed{(+a) \times (+b) = (+c)}$ $\boxed{(-a) \times (-b) = (+c)}$

$(+4) \times (+6) = (+24)$ $(-4) \times (-6) = (+24)$

(b) Hasilkali antara dua bilangan yang berlainan tanda (+ *a*) dan (- *b*), atau (- *a*) dan (+ *b*), adalah sebuah bilangan negatif (- *c*).

$\boxed{(+a) \times (-b) = (-c)}$ $\boxed{(-a) \times (+b) = (-c)}$

$(+4) \times (-6) = (-24)$ $(-4) \times (+6) = (-24)$

2.3.4 Operasi Pembagian

(a) Hasilbagi antara dua bilangan positif (+ *a*) dan (+ *b*), serta antara dua bilangan negatif (- *a*) dan (- *b*), adalah sebuah bilangan positif (+ *c*).

$\boxed{(+a) : (+b) = (+c)}$ $\boxed{(-a) : (-b) = (+c)}$

$(+8) : (+4) = (+2)$ $(-8) : (-4) = (+2)$

(b) Hasilbagi antara dua bilangan yang berlainan tanda (+ *a*) dan (- *b*), atau (- *a*) dan (+ *b*), adalah sebuah bilangan negatif (- *c*).

$\boxed{(+a) : (-b) = (-c)}$ $\boxed{(-a) : (+b) = (-c)}$

$(+8) : (-4) = (-2)$ $(-8) : (+4) = (-2)$

2.4 OPERASI BILANGAN PECAHAN

Bilangan pecahan ialah bilangan rasional yang (benar dugaan anda !) tidak bulat atau tidak utuh. Berdasarkan cara penulisannya, bilangan pecahan bisa dibedakan atas *pecahan biasa* dan *pecahan desimal.* Pecahan biasa selalu menunjukkan bentuk pembagian antara dua bilangan. Sebagai contoh, pecahan $\frac{3}{4}$ menunjukkan bentuk pembagian 3 : 4, pecahan $\frac{2}{5}$ menunjukkan bentuk pembagian 2 : 5. Setiap pecahan biasa pada dasarnya dapat diubahbentuk menjadi pecahan desimal, yakni dengan cara mengisikan atau mencantumkan angka-angka tertentu yang memenuhi di belakang tanda koma. Jadi, pecahan biasa $\frac{3}{4}$ dapat dituliskan menjadi pecahan desimal 0,75, sedangkan $\frac{2}{5}$ menjadi 0,4.

Dalam suatu pecahan biasa terdapat dua macam suku, yaitu *suku terbagi (numerator)* dan *suku pembagi (denominator).* Suku terbagi terletak di atas garisbagi, sedangkan suku pembagi terletak di bawahnya. Dalam contoh $\frac{3}{4}$ dan $\frac{2}{5}$ tadi, angka 3 dan angka 2 masing-masing adalah suku terbagi, sedangkan angka 4 dan angka 5 masing-masing adalah suku pembagi.

Berdasarkan nilai-nilai (maksudnya : harga mutlak) dari suku-sukunya, pecahan biasa dibedakan menjadi tiga macam yaitu *pecahan layak, pecahan tak-layak* dan *pecahan kompleks.* Pecahan layak ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya lebih kecil dari harga mutlak suku pembaginya. Apabila pecahan layak ini didesimalkan, angka di depan tanda koma akan selalu berupa angka nol. Pecahan $\frac{3}{4}$ dan $\frac{2}{5}$ dalam contoh di atas merupakan contoh-contoh pecahan layak. Sedangkan pecahan tak-layak ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya sama dengan atau lebih besar dari harga mutlak suku pembaginya. Jika ia didesimalkan, angka di depan tanda koma akan berupa angka bukan-nol. Contoh pecahan tak-layak misalnya $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{-9}{4}$ dan $\frac{16}{5}$ — yang bila didesimalkan masing-masing akan menjadi 1,0; 1,75; -2,25 dan 3,2.

Adapun pecahan kompleks ialah pecahan yang pada salah satu atau kedua-dua sukunya terdapat satu pecahan atau lebih. Jadi jika pada suku terbagi (atau pada suku pembagi, atau bahkan pada kedua suku tersebut) masih terdapat lagi satu atau beberapa pecahan, maka pecahan demikian dinamakan pecahan kompleks. Dari beberapa contoh yang disajikan di bawah akan terlihat kompleksitas pecahan seperti ini; pada suku terbagi terdapat suku pembagi, sementara pada suku pembagi terdapat suku terbagi. Ringkas kata, pecahan kompleks ialah pecahan yang mengandung pecahan. Dalam penulisan sebuah pecahan kompleks, garisbagi yang memisahkan antara suku-terbagi utama dan suku-pembagi utama harus dibuat lebih panjang dari garisbagi lainnya.

Contoh pecahan kompleks :

(a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{8}$ (b) $\dfrac{1}{\frac{2}{5}}$ (c) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$ (d) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$

Pecahan kompleks pada akhirnya akan mengarah ke salah satu bentuk : menjadi pecahan layak atau menjadi pecahan tak-layak. Apabila kita selesaikan atau sederhanakan, pecahan kompleks (a) dan (c) dalam contoh di atas akan menjadi pecahan layak, sedangkan pecahan kompleks (b) dan (d) tak lain adalah pecahan tak-layak.

Apabila sebuah bilangan terdiri dari sebuah bilangan bulat dan sebuah pecahan, ia dinamakan bilangan campuran. Angka $2\frac{3}{4}$ atau 2,75 adalah sebuah bilangan campuran sebab $2\frac{3}{4}$ adalah sama dengan $2 + \frac{3}{4}$; atau di lain pihak, 2,75 adalah sama dengan 2 + 0,75. Pecahan tak-layak pada hakekatnya adalah bilangan campuran, karena ia dapat diuraikan menjadi sebuah bilangan

 $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ $\frac{5+2}{6+2} = \frac{8}{8}$

bulat dan sebuah pecahan, ia bahkan dapat berubah menjadi sebuah bilangan bulat saja. Itulah sebabnya ia dijuluki sebagai pecahan tak-layak, karena ia tidak murni sebagai sebuah pecahan.

Setelah membahas secara panjang lebar berbagai jenis dan pengertian bilangan pecahan, kini marilah kita pahami prinsip-prinsip pengoperasiannya, dalam hal ini pengoperasian pecahan biasa.

2.4.1 Operasi Pemadanan

Suku-suku dalam sebuah pecahan dapat diperbesar atau diperkecil tanpa mengubah nilai pecahannya, sepanjang keduanya (suku terbagi dan suku pembagi) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama. Secara umum :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}}$$

Contoh memperbesar pecahan :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}; \quad \frac{10}{15} = \frac{10 \times 4}{15 \times 4} = \frac{40}{60}; \quad \frac{40}{60} = \frac{40 \times c}{60 \times c}; \text{ dst.}$$

Pecahan-pecahan $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{40\,c}{60\,c}$ adalah sepadan.

Pembesaran padanan $\frac{2}{3}$ dapat dilakukan secara tak terbatas.

Contoh memperkecil pecahan :

$$\frac{24}{30} = \frac{24 : 2}{30 : 2} = \frac{12}{15}; \qquad \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}.$$

Pecahan-pecahan $\frac{24}{30}$, $\frac{12}{15}$ dan $\frac{4}{5}$ adalah sepadan.

Berdasarkan kedua contoh di atas, dapat disimpulkan : pembesaran pecahan bersifat tak terbatas, sedangkan pengecilan pecahan bersifat terbatas. Kita dapat memperbesar sebuah pecahan sekehendak kita. Akan tetapi kita hanya dapat memperkecil sebuah pecahan sampai pada bentuk tersederhana, atau sampai pada suku-suku terkecil, yakni jika kedua suku pada pecahan bersangkutan tidak lagi mempunyai pembagi bersama.

Dalam contoh memperkecil pecahan di atas, 2 merupakan pembagi bersama atas 24 dan 30, sedangkan 3 merupakan pembagi bersama atas 12 dan 15, akan tetapi tidak terdapat pembagi bersama atas 4 dan 5. Berarti 4 dan 5 merupakan suku-suku terkecil dari pecahan $\frac{24}{30}$. Sesudah mencapai bentuk $\frac{4}{5}$ kita tidak lagi dapat memperkecilnya. Jadi, pecahan $\frac{4}{5}$ adalah bentuk tersederhana dari pecahan $\frac{24}{30}$. (Perlu dicatat : Pengertian ''terbatas dalam memperkecil pecahan'' di sini maksudnya adalah ''terbatas sampai pecahan bersangkutan tidak menjadi pecahan kompleks'' !). Kesimpulannya : jika sebuah pecahan sudah mencapai bentuk tersederhana, maka ia tak lagi dapat diperkecil; sebaliknya jika sebuah pecahan tak lagi dapat diperkecil, berarti ia sudah mencapai bentuk tersederhana.

2.4.2 Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Dua buah pecahan atau lebih hanya dapat ditambahkan dan dikurangkan apabila mereka memiliki suku-suku pembagi yang sama atau sejenis. Berarti jika suku-suku pembaginya belum sama, terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan-pecahan tersebut ditambahkan atau dikurangkan. Dalam menyamakan suku-suku pembaginya, diusahakan pecahan-pecahan tadi mempunyai *suku pembagi bersama terkecil* (spbt).

Contoh :

1) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$

2) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

3) $\frac{6}{8} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$

4) $\frac{6}{8} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

Angka 4 dalam contoh 3) dan 4) di atas adalah spbt.

Dalam hal pecahan-pecahan yang hendak dijumlahkan atau dikurangkan tidak memiliki spbt, hasilkali antara suku-suku pembaginya merupakan spbt.

5) $\frac{5}{a} + \frac{2}{b} = ?$ spbt-nya adalah $a \times b$

$$\frac{5}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5\,b}{ab} + \frac{2.a}{ab} = \frac{5\,b + 2\,a}{ab}$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

6) $\frac{5}{8} + \frac{2}{3} = ?$ spbt-nya adalah 8×3

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \\[2ex] \frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24} \end{array}\right\} \frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{15}{24} + \frac{16}{24} = \frac{15 + 16}{24} = \frac{31}{24} = 1\frac{7}{24}$$

Penjumlahan (pengurangan) bilangan-bilangan campuran dapat dilakukan dengan cara menambahkan (mengurangkan) bilangan-bilangan bulatnya dulu, kemudian menambahkan (mengurangkan) pecahan dengan pecahannya. Jadi tidak harus dengan mengubah bilangan-bilangan campuran tersebut menjadi pecahan-tak-layak terlebih dahulu.

7) $2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = (2 + 3) + (\frac{5}{8} + \frac{2}{8}) = 5 + \frac{7}{8} = 5\frac{7}{8}$

alternatifnya :

$$2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = \frac{21}{8} + \frac{26}{8} = \frac{21 + 26}{8} = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}$$

2.4.3 Operasi Perkalian

Perkalian antarpecahan dilakukan dengan cara mengalikan suku-suku sejenis, suku terbagi dikalikan suku terbagi dan suku pembagi dikalikan suku pembagi. Perkalian yang mengandung bilangan campuran dilakukan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi pecahan tak-layak sebelum dikalikan.

Contoh :

1) $\frac{a}{x} \times \frac{b}{y} = \frac{a\,b}{x\,y}$

2) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

3) $5\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{2} = \frac{23}{4} \times \frac{13}{2} = \frac{299}{8} = 37\frac{3}{8}$

2.4.4 Operasi Pembagian

Pembagian antarpecahan dapat dilakukan dengan 3 macam cara. Cara pertama merupakan cara yang paling populer, paling sering dipraktekkan.

Cara 1 Kalikan pecahan terbagi (pecahan yang akan dibagi) dengan kebalikan dari pecahan pembagi.

Contoh :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \text{ atau } \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{\cancel{8}_{2}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{3} = \frac{5}{6}$$

Cara 2 Ubah terlebih dahulu pecahan terbagi dan pecahan pembagi sehingga keduanya mempunyai suku pembagi bersama terkecil (spbt), batalkan spbt tersebut dan kemudian bagilah suku-suku terbagi yang tersisa.

Contoh :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} : \frac{6}{8} = 5 : 6 = \frac{5}{6}$$

Bilangan 8 merupakan spbt

Cara 3 Kalikan terlebih dahulu kedua pecahan dengan spbt-nya, selesaikan atau sederhanakan masing-masing pecahan dan kemudian baru dibagi.

Contoh :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{\cancel{8}_{1}} \times \cancel{8}^{1}\right) : \left(\frac{3}{\cancel{4}_{1}} \times \cancel{8}^{2}\right) = 5 : 6 = \frac{5}{6}$$

Latihan Sistem Bilangan

1. Benarkah bahwa jika $a < x < b$, maka selalu $x.a < x.b$. ?

2. Mana yang salah di antara pernyataan-pernyataan berikut ?
   (a) Bilangan positif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif.
   (b) Bilangan negatif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif.
   (c) Bilangan negatif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif.
   (d) Bilangan positif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif.

3. Ubahlah pecahan-pecahan biasa di bawah ini menjadi pecahan desimal, sampai dengan tiga angka di belakang koma :

   (a) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{3}{20}$ 0,150 (e) $\frac{11}{4}$

   (b) $\frac{7}{12}$ 0,585 (d) $\frac{-5}{8}$ (f) $\frac{15}{-9}$

4. Tentukan spbt dari pasangan-pasangan pecahan berikut :

   (a) $\frac{3}{8}$ dan $\frac{4}{6}$ $\frac{9+16}{24} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$

   (b) $\frac{5}{6}$ dan $\frac{5}{12}$ $\frac{10+5}{12} = \frac{15}{12} = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$

   (c) $\frac{3}{7}$ dan $\frac{7}{3}$ $\frac{9+49}{21} = \frac{58}{21} = 2\frac{16}{21}$

   (d) $\frac{}{6}$ dan $4\frac{1}{3}$ $10\frac{1}{3}$

5. Hitunglah jumlah dari masing-masing pasangan pecahan dalam Soal 4 di atas.

6. Hitunglah selisih dari masing-masing pasangan pecahan dalam Soal 4 di atas dan sajikan secara desimal. a. $-\frac{1}{24}$ = -0,892 , b. 0,417
   c. -1,908 , d = 1,667.

7. Hitunglah hasilkali dari masing-masing pasangan pecahan dalam Soal 4 di atas. a = $\frac{1}{4}$, b = $\frac{25}{72}$, c = 1 , d = 26

8. Masih berdasarkan Soal 4 tersebut, sekarang hitunglah hasilbaginya masing-masing dan nyatakan dalam bentuk desimal.
   a = 0,562 c, 0,184
   b = 2. d, 1,385

9. Selesaikan :

(a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{1}{6}$ $= 1\frac{17}{84}$

(b) $\frac{3}{4} - \frac{2}{7} - \frac{1}{6}$ $= \frac{25}{84}$

(c) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$ $= \frac{1}{28}$

(d) $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} : \frac{1}{6}$ $= 15\frac{3}{9}$

10. Selesaikan :

(a) 0,32 + 0,09 + 0,13 =0,59

(b) 0,32 — 0,09 — 0,13 = -0,71

(c) 0,32 × 0,09 × 0,13 0,0 37

(d) 0,32 : 0,09 : 0,13 2,735

BAB 3

PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA

Bab ini menguraikan tiga unsur penting dalam operasi matematika; mengenai pangkat, akar dan logaritma. Ketiganya sangat sering digunakan dalam proses penyelesaian persoalan-persoalan matematik. Pemahaman akan cara kerja konsep-konsep ini, meskipun tampaknya sepele, sangat penting dimiliki.

3.1 PANGKAT

Pangkat dari sebuah bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun. Notasi x^a berarti bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak a kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas. Sebagai contoh : perkalian bilangan 7 sebanyak 5 kali tak perlu dituliskan dengan lengkap $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$, melainkan cukup diringkas menjadi 7^5. Jadi,

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$$
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$$
$$0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}3^6$$

Notasi pemangkatan berfaedah pula untuk meringkas bilangan-bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil. Sebagai contoh : bilangan 100.000 dapat diringkas menjadi 10^5; bilangan 1/100.000 atau 0,00001 dapat diringkas menjadi 10^{-5}. Begitu pula,

$1.000.000.000 = 10^9$
$5.000.000.000 = 5 \cdot 10^9$
$7.500.000.000 = 7{,}5 \cdot 10^9$ atau $75 \cdot 10^8$
$0{,}000.000.001 = 10^{-9}$
$0{,}000.000.034 = 34 \cdot 10^{-9}$ atau $3{,}4 \cdot 10^{-8}$

Pemangkatan sebuah bilangan dan pengoperasian bilangan-bilangan berpangkat mematuhi kaidah-kaidah tertentu. Berdasarkan kaidah-kaidah yang segera akan dipaparkan berikut ini, kita dapat pula memetik berbagai faedah lain dari notasi pemangkatan.

3.1.1 Kaidah Pemangkatan Bilangan

1. Bilangan bukan-nol berpangkat nol adalah satu.

$\boxed{x^0 = 1 \quad (x \neq 0)}$ Contoh : $3^0 = 1$

2. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

$\boxed{x^1 = x}$ $3^1 = 3$

3. Nol berpangkat sebuah bilangan adalah tetap nol.

$\boxed{0^x = 0}$ $0^3 = 0$

4. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali (*multiplicative inverse*) dari bilangan itu sendiri.

$\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\left(\frac{1}{9} = 9^{-1}\right)$

5. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri, dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

$\boxed{x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}}$ $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} = 1{,}55$

6. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasilbagi suku-suku berpangkatnya.

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

7. Bilangan-berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasilkali pangkat-pangkatnya.

$$\boxed{(x^a)^b = x^{ab}} \qquad (3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6561$$

8. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

$$\boxed{\begin{array}{l} x^{a^b} = x^c \\ \\ \text{dimana } c = a^b \end{array}} \qquad 3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.721$$

Kaidah ke-7 dan ke-8 di atas perlu mendapat perhatian khusus, sebab acapkali diselesaikan secara tak benar. Jika kita kurang teliti, contoh-contoh dalam kaidah ke-7 dan ke-8 tersebut bisa salah diselesaikan menjadi 9^4 (= 1296), padahal seharusnya masing-masing adalah 3^8 dan 3^{16}. Prinsip penyelesaian bilangan yang pangkatnya beranting ialah menyelesaikan pangkat-pangkatnya terlebih dahulu.

Kaidah ke-6 identik dengan kaidah ke-12, kaidah pembagian bilangan berpangkat, yang segera akan kita bahas dalam Seksi 3.1.3. Sementara itu kaidah ke-5 di atas, sebagaimana akan terlihat nanti, identik dengan kaidah ke-2 mengenai pengakaran bilangan yang diuraikan dalam Seksi 3.2.1.

3.1.2 Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat

9. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

$$\boxed{x^a \,.\, x^b = x^{a+b}} \qquad 3^2 \,.\, 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

10. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$\boxed{x^a \cdot y^a = (xy)^a} \qquad 3^2 \cdot 5^2 = (3.5)^2 = 15^2 = 225$$

3.1.3 Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat

11. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya.

$$\boxed{x^a : x^b = x^{a-b}} \qquad 3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

12. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$\boxed{x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a} \qquad 3^2 : 5^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Bandingkan kaidah ke-12 ini dengan kaidah ke-6 di muka.

3.2 AKAR

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan kita mengetahui, bahwa jika bilangan-bilangan yang sama (misalnya x) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) a kali, maka kita dapat menuliskannya menjadi x^a; x disebut *basis* dan a disebut *pangkat*. Andaikata $x^a = m$, maka x dapat juga disebut sebagai akar pangkat a dari m, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi, $\sqrt[a]{m} = x$ sebab $x^a = m$; atau dengan perkataan lain, $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$.

$\sqrt[2]{9} = 3$ sebab $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{64} = 4$ sebab $4^3 = 64$

Secara umum :

$$\sqrt[a]{m} = x \text{ jika } x^a = m$$

Dalam notasi $\sqrt[a]{m}$, *a* disebut *pangkat dari akar* sedangkan *m* disebut *radikan*. Pangkat 2 dari akar biasanya tidak dicantumkan dalam penulisan, sehingga tanda akar yang tidak mencantumkan pangkat dengan sendirinya harus dibaca dan ditafsirkan sebagai akar berpangkat 2. Jadi, $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9}$, $\sqrt[2]{25} = \sqrt{25}$.

Apabila pangkat akarnya berupa bilangan genap, maka radikan positif akan menghasilkan dua macam akar : yang satu positif dan satunya lagi negatif. Hal ini selaras dengan kaidah perkalian dalam operasi tanda, bahwa baik bilangan positif maupun bilangan negatif jika berpangkat genap akan menghasilkan bilangan positif. Jadi, sesungguhnya $\sqrt{9} = \pm 3$ (baca : + 3 dan -3), bukan hanya + 3; sebab $(+3)^2 = 9$ dan $(-3)^2 = 9$ juga. Sama halnya, $\sqrt{25} = \pm 5$ dan bukan hanya + 5, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ dan bukan hanya + 2.

Apabila pangkat akarnya genap dan radikannya negatif, hasilnya adalah berupa bilangan khayal (lihat kembali Bab 2). Sebagai contoh $\sqrt{-9}$ adalah bilangan khayal, sebab baik + 3 maupun — 3 jika dipangkatkan 2 tidak ada yang menghasilkan — 9.

Apabila pangkat akarnya berupa bilangan ganjil, baik radikan positif maupun radikan negatif hanya akan menghasilkan satu macam akar; radikan positif menghasilkan akar positif, radikan negatif menghasilan akar negatif.

$$\sqrt[3]{64} = +4 \text{ sebab hanya } (+4)(+4)(+4) = 64$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \text{ sebab hanya } (-4)(-4)(-4) = -64$$

Seperti halnya dalam hal pemangkatan, pengakaran bilangan pun mematuhi sejumlah kaidah. Kaidah-kaidah tersebut dirinci di bawah ini.

3.2.1 Kaidah Pengakaran Bilangan

1. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya.

   Berdasarkan $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$ (x adalah basis), maka :

$$\boxed{\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}}$$

sebab $(x^{\frac{1}{b}})^b = x^{\frac{b}{b}} = x^1 = x$

dalam hal ini $x^{\frac{1}{b}}$ adalah basis.

Contoh : $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4.$

2. Akar dari sebuah bilangan berpangkat adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

$$\boxed{\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}} \qquad \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1{,}55$$

Kaidah ke-2 ini sesungguhnya merupakan pengembangan atau analogi dari kaidah ke-1 sebelumnya. (Bandingkan pula kaidah ke-2 ini dengan kaidah ke-5 mengenai pemangkatan bilangan pecahan, dalam Seksi 3.1.1 di muka).

3. Akar dari suatu perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

$$\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y} \qquad \sqrt[3]{8{,}64} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{64} = 2.4 = 8$$

(Lihat juga kaidah ke-6 di bawah nanti).

4. Akar dari sebuah bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunva.

$$\boxed{\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}} \qquad \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

(Bandingkan kaidah ini dengan kaidah ke-8 nanti).

3.2.2 Kaidah Penjumlahan (Pengurangan) Bilangan Terakar

Bilangan-bilangan terakar hanya dapat ditambahkan atau dikurangkan apabila akar-akarnya sejenis. Yang dimaksud dengan akar-akar yang sejenis ialah akar-akar yang pangkat dan radikannya sama.

5. Jumlah (selisih) bilangan-bilangan terakar adalah jumlah (selisih) koefisien-koefisiennya terakar.

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh : $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 7(1{,}73) = 12{,}11$.

3.2.3 Kaidah Perkalian Bilangan Terakar

6. Hasilkali bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilkali bilangan-bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\sqrt[b]{x}\,.\,\sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy} \qquad \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = 8$$

(Identik dengan kaidah ke-3 sebelumnya).

7. Akar ganda dari sebuah bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat-baru akarnya ialah hasilkali pangkat dari akar-akar sebelumnya.

$$\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^a}} = \sqrt[bc]{x^a} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{15\,625}} = \sqrt[2.3]{15\,625} = 5$$

3.2.4 Kaidah Pembagian Bilangan Terakar

8. Hasilbagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilbagi bilangan-bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}} \qquad \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5$$

(Identik dengan kaidah ke-4 sebelumnya).

3.3 LOGARITMA

Logaritma pada hakekatnya merupakan kebalikan dari proses pemangkatan dan/atau pengakaran. Ia dapat dipakai untuk menyederhanakan operasi-operasi perkalian, pembagian, pencarian pangkat dan penarikan akar. Logaritma dari suatu bilangan ialah pangkat yang harus dikenakan pada (memenuhi) bilangan pokok logaritma untuk memperoleh bilangan tersebut.

Andaikata sebuah bilangan berpangkat (x^a) sama dengan bilangan positif tertentu (m), maka dalam bentuk pemangkatan kita dapat menuliskannya menjadi :

$x^a = m$ dimana x adalah basis
dan a adalah pangkat.

Pangkat a disebut juga logaritma dari m terhadap basis x , yang jika dituliskan dalam bentuk logaritma menjadi :

$a = {}^x\log m$ atau $a = \log_x m$.

Bilangan pokok (basis) logaritma, x dalam contoh di atas, dapat dituliskan di pojok-kiri-atas dari tanda log (singkatan logaritma) atau di pojok-kanan-bawah dari tanda tersebut. Berdasarkan kesamaan bentuk pemangkatan dan logaritma sebagaimana ditunjukkan di atas, kita dapat pula menarik analogi untuk pernyataan-pernyataan di bawah ini :

$5^2 = 25$; pangkat 2 adalah logaritma dari 25 terhadap basis 5, atau ${}^5\log 25 = 2$.

$4^3 = 64$; pangkat 3 adalah logaritma dari 64 terhadap basis 4, atau ${}^4\log 64 = 3$.

$10^2 = 100$; pangkat 2 adalah logaritma dari 100 terhadap basis 10, atau ${}^{10}\log 100 = 2$.

Selain dengan bentuk pemangkatan, bentuk logaritma juga erat berhubungan dengan bentuk pengakaran. Keeratan hubungan di antara ketiga macam bentuk ini dapat dilihat sebagai berikut :

Bentuk Pangkat	Bentuk Akar	Bentuk Logaritma
$x^a = m$	$\sqrt[a]{m} = x$	${}^x\log m = a$

[suku-suku di ruas kanan menunjukkan bilangan yang dicari atau hendak dihitung pada masing-masing bentuk]

Dalam pemangkatan, kita mengetahui basis (x) serta pangkat (a), dan ingin mengetahui bilangan yang merupakan hasil pemangkatan basis tersebut (yaitu m). Dalam pengakaran, kita mengetahui sebuah bilangan tertentu yang disebut radikan (m) serta pangkat dari akarnya (a), dan ingin mengetahui hasil pengakaran radikan tadi (yaitu x). Sedangkan dalam logaritma, kita mengetahui basis logaritma (x) serta bilangan logaritma (m), dan ingin mengetahui hasil logaritmanya (yaitu a).

Perhatikan kedudukan a, m dan x pada masing-masing bentuk di atas. Bilangan a yang merupakan hasil logaritma, tak lain adalah pangkat dari basis dalam bentuk pangkat dan pangkat dari akar dalam bentuk akar. Sedangkan m yang merupakan hasil pemangkatan, tak lain adalah radikan dalam bentuk akar dan bilangan logaritma dalam bentuk logaritma. Adapun x yang merupakan hasil pengakaran, tak lain adalah basis baik dalam bentuk pangkat maupun dalam bentuk logaritma.

Berdasarkan uraian-uraian di atas, dapatlah disimpulkan bahwa :

${}^{x}\log m = a$ jika $x^a = m$ atau $\sqrt[a]{m} = x$

Contoh :

1) ${}^{6}\log 36 = 2$ sebab $6^2 = 36$ atau $\sqrt{36} = 6$

2) ${}^{5}\log 625 = 4$ sebab $5^4 = 625$ atau $\sqrt[4]{625} = 5$

3) Jika ${}^{x}\log 49 = 2$, berarti $x^2 = 49$, $x = \sqrt{49} = 7$

4) Jika ${}^{3}\log m = 10$, berarti $3^{10} = m$, $m = 59\,049$

5) Jika ${}^{10}\log 1.000 = a$, berarti $10^a = 1.000$, $10^a = 10^3$, $a = 3$.

3.3.1 Basis Logaritma

${}^{x}\log m = a$ $x^a = m$ $x = \sqrt[a]{m}$

Logaritma dapat dihitung untuk basis berapapun. Akan tetapi pada umumnya basis logaritma selalu berupa bilangan positif dan tidak sama dengan satu. Basis logaritma yang paling lazim dipakai, karena pertimbangan praktis dalam penghitungan, adalah bilangan 10. Karena kelaziman tersebut maka basis 10 ini pada umumnya tidak dicantumkan dalam notasi logaritma. Dengan demikian $\log m$ berarti adalah ${}^{10}\log m$, $\log 24 \equiv {}^{10}\log 24$, ${}^{10}\log 65$ dapat dituliskan menjadi $\log 65$ saja. (Uraian-uraian selanjutnya di dalam buku ini juga mengikuti kelaziman tersebut; untuk setiap notasi logaritma yang tidak mencantumkan basis tertentu, berarti merupakan **logaritma berbasis 10).**

Logaritma berbasis 10 disebut juga logaritma biasa (*common logarithm*) atau logaritma Briggs (berdasarkan nama penemunya, *Henry Briggs*, 1561 — 1630). Di samping bilangan 10, basis lain yang juga lazim dipakai dalam logaritma adalah bilangan e (e = 2,718287 atau sering diringkas menjadi 2,72). Logaritma berbasis e disebut juga logaritma alam (*natural logarithm*) atau logaritma Napier (*John Napier*, penemunya, hidup antara tahun 1550 — 1617). Jika notasi logaritma Briggs dilambangkan dengan log, maka logaritma Napier dilambangkan dengan ln. Dengan demikian ln m berarti ${}^{e}\log m$, ln 24 ≡ ${}^{e}\log 24$, ${}^{e}\log 65$ dapat dituliskan menjadi ln 65 saja.

3.3.2 Kaidah-kaidah Logaritma

1. $\boxed{{}^{x}\log x = 1}$ sebab $x^1 = x$

   Contoh :

   1) ${}^{10}\log 10 = 1$ 2) ${}^{8}\log 8 = 1$

2. $\boxed{{}^{x}\log 1 = 0}$ sebab $x^0 = 1$

   Contoh :

   1) ${}^{10}\log 1 = 0$ 2) ${}^{8}\log 1 = 0$

3. $\boxed{{}^{x}\log x^a = a}$ sebab $x^a = x^a$

   Contoh :

   1) ${}^{10}\log 10^2 = 2$ 2) ${}^{8}\log 8^3 = 3$

4. $\boxed{{}^{x}\log m^a = a\ {}^{x}\log m}$

   1) ${}^{10}\log 100^2 = 2\ {}^{10}\log 100 = 2\ {}^{10}\log 10^2 = 2.2 = 4$
   2) ${}^{8}\log 512^4 = 4\ {}^{8}\log 512 = 4\ {}^{8}\log 8^3 = 4.3 = 12$

5. $\boxed{x^{\,{}^{x}\log m} = m}$

   1) $10^{\,{}^{10}\log 100} = 10^{\,{}^{10}\log 10^2} = 10^2 = 100$
   2) $8^{\,{}^{8}\log 512} = 8^{\,{}^{8}\log 8^3} = 8^3 = 512$

6. $\boxed{{}^{x}\log m\,n = {}^{x}\log m + {}^{x}\log n}$

   1) ${}^{10}\log (100)(1000) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 1000 = 2 + 3 = 5$
   2) ${}^{3}\log (243)(27) = {}^{3}\log 243 + {}^{3}\log 27 = 5 + 3 = 8$

7. $\boxed{{}^{x}\log \frac{m}{n} = {}^{x}\log m - {}^{x}\log n}$

1) ${}^{10}\log \frac{100}{1000} = {}^{10}\log 100 - {}^{10}\log 1000 = 2 - 3 = -1$

2) ${}^{3}\log \frac{243}{27} = {}^{3}\log 243 - {}^{3}\log 27 = 5 - 3 = 2$

8. $\boxed{{}^{x}\log m \,.\, {}^{m}\log x = 1}$ sehingga ${}^{x}\log m = \frac{1}{{}^{m}\log x}$

1) ${}^{10}\log 100 \,.\, {}^{100}\log 10 = {}^{10}\log 10^{2} \times {}^{100}\log 100^{0,5} = 2 \times 0,5 = 1$
2) ${}^{3}\log 81 \,.\, {}^{81}\log 3 = {}^{3}\log 3^{4} \times {}^{81}\log 81^{0,25} = 4 \times 0,25 = 1$

9. $\boxed{{}^{x}\log m \,.\, {}^{m}\log n \,.\, {}^{n}\log x = 1}$

1) ${}^{10}\log 100 \,.\, {}^{100}\log 10000 \,.\, {}^{10000}\log 10 =$
${}^{10}\log 10^{2} \times {}^{100}\log 100^{2} \times {}^{10000}\log 10000^{0,25} = 2 \times 2 \times 0,25 = 1$
2) ${}^{3}\log 9 \,.\, {}^{9}\log 729 \,.\, {}^{729}\log 3 =$
${}^{3}\log 3^{2} \times {}^{9}\log 9^{3} \times {}^{729}\log 729^{1/6} = 2 \times 3 \times \frac{1}{6} = 1$

3.3.3 Penyelesaian Persamaan dengan Logaritma

Logaritma dapat digunakan untuk mencari bilangan yang belum diketahui (bilangan anu) dalam sebuah persamaan, khususnya persamaan eksponensial dan persamaan logaritmik. Persamaan eksponensial ialah persamaan yang bilangan anunya berupa pangkat, misalnya $5^{x} = 125$ dan $3^{x+1} = 27$. Sedangkan persamaan logaritmik ialah persamaan yang bilangan anunya berupa bilangan logaritma, sebagai contoh $\log (3x + 298) = 3$.

Untuk menyelesaikan sebuah persamaan eksponensial dengan menggunakan logaritma, pertama-tama logaritmakan dulu kedua ruas persamaan, kemudian selesaikan bilangan anunya berdasarkan persamaan logaritmik yang baru terbentuk.

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Contoh :

1) Hitunglah x untuk $3^{x+1} = 27$
Dengan melogaritmakan kedua ruas :
$\log 3^{x+1} = \log 27$
$(x + 1) \log 3 = \log 27$

$$x + 1 = \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{1,4314}{0,4771} = 3$$

$x = 3 - 1 = 2.$ Bukti : $3^{2+1} = 3^3 = 27.$

Untuk contoh ini, karena kebetulan soalnya relatif sederhana, kita dapat pula memecahkannya secara langsung tanpa menggunakan logaritma :

$3^{x+1} = 27$
$3^{x+1} = 3^3$
$x + 1 = 3, \quad x = 3 - 1 = 2.$

2) Carilah x jika $(0{,}32 + x)^{15} = 789.$

$$
\begin{aligned}
(0{,}32 + x)^{15} &= 789 \\
\log (0{,}32 + x)^{15} &= \log 789 \\
15 \log (0{,}32 + x) &= 2{,}8971 \\
\log (0{,}32 + x) &= \frac{2{,}8971}{15} \\
\log (0{,}32 + x) &= 0{,}1931 \\
(0{,}32 + x) &= \text{antilog } 0{,}1931 \\
(0{,}32 + x) &= 1{,}56 \\
x &= 1{,}56 - 0{,}32 = 1{,}24.
\end{aligned}
$$

3) Selesaikan x untuk $\log (3x + 298) = 3$
Berdasarkan definisi logaritma, kita dapat menuliskan
$\log (3\,x + 298) = 3$
ke dalam bentuk pangkat menjadi :
$(3\,x + 298) = 10^3$
sehingga :
$3\,x + 298 = 1000$
$3\,x = 702, \quad x = 234.$

Latihan Pangkat, Akar dan Logaritma

1. Sederhanakanlah bentuk-bentuk berikut dan selesaikan :
   (a) $4^5 . 4^3 . 4^{-6} = 4^2 = 16$ (c) $4^5 : 4^3 : 4^{-6} = 4^8$
   (b) $5^4 . 3^4 . (-6)^4 =$ (d) $5^4 . 3^4 : (-6)^4$
2. Ubahlah bentuk-bentuk berikut ke dalam bentuk akar :
   (a) $6^{2/3} = \sqrt[3]{6^2}$ (c) $3^{1/7} . 3^{4/7} : 3^{3/7}$
   (b) $(6^{2/3})^2 =$ (d) $7^{2/5} + 9^{3/5}$
   6

3). Sederhanakan dan kemudian selesaikan :
   (a) $10\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{\sqrt[3]{169}}$
   (b) $(\sqrt[3]{27})(5\sqrt[3]{125})$ (d) $(5\sqrt{16}) : (2\sqrt{4})$

4) Ubahlah ke dalam bentuk logaritma :

(a) 5^4
(b) $\sqrt[3]{64}$
(c) $4^5 \cdot 4^3 : 4^{-6}$
(d) $3^{9/2} : \sqrt{243}$

5) Carilah dalam daftar logaritma atau gunakan kalkulator tangan :

(a) log 9 = 0,9542
(b) log 17 = 1,230
(c) log 5^8 = 5,592
(d) log 6 : 2

6) Apabila x dan y masing-masing adalah 100 dan 50, hitunglah :

(a) log xy log 10^2 · log $5^2 \cdot 2$
2 · 2 log 5 · 2
(b) $\log \dfrac{x}{y}$
(c) $\log x^2 y$
(d) $\log \dfrac{x^2}{y}$

7) Carilah x jika :

(a) $\log x = 0{,}3010$
(b) $\log x = 1{,}2304$
(c) $\log x^2 = 1{,}7482$
(d) $\log x^2 = 2{,}6021$

8) Berapa x jika :

(a) $x^5 = 50.000$?
(b) $x^{37} = 2500\,(7{,}50)^{37}$? 0,1,909

9) Hitunglah x yang memenuhi :

(a) $100^x = 50.000$
(b) $72^{x-0{,}1621} = 36$

10) Hitunglah :

(a) $^6\log 36$
(b) $^8\log 512$
(c) ln e
(d) ln 17

$^6\log 6^2 = 2$

BAB 4
D E R E T

Deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku. Keteraturan rangkaian bilangan yang membentuk sebuah deret terlihat pada "pola perubahan" bilangan-bilangan tersebut dari satu suku ke suku berikutnya.

Dilihat dari jumlah suku yang membentuknya, deret digolongkan atas *deret berhingga* dan *deret tak-berhingga*. Deret berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tertentu, sedangkan deret tak-berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tidak terbatas. Sedangkan dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya, deret bisa dibeda-bedakan menjadi *deret hitung, deret ukur* dan *deret harmoni.*

4.1 DERET HITUNG

Deret hitung ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung ini dinamakan pembeda, yang tak lain merupakan selisih antara nilai-nilai dua suku yang berurutan.

Contoh :

1) 7, 12, 17, 22, 27, 32 (pembeda = 5)
2) 93, 83, 73, 63, 53, 43 (pembeda = - 10)

Dua hal yang penting untuk diketahui atau dihitung dalam setiap persoalan deret, baik deret hitung maupun deret ukur, adalah besarnya nilai pada suatu suku tertentu dan jumlah nilai deret tersebut sampai dengan suku yang bersangkutan.

4.1.1 Suku ke-*n* dari DH

Besarnya nilai suku tertentu (ke-*n*) dari sebuah deret hitung dapat dihitung melalui sebuah rumus. Untuk membentuk rumus yang dimaksud, perhatikan Contoh 1) di atas. Dalam contoh tersebut, nilai suku pertamanya (a) adalah 7 dan pembedanya (b) adalah 5.

$$\begin{array}{cccccc} 7, & 12, & 17, & 22, & 27, & 32 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 7 = a \\ S_2 = 12 = a + b = a + (2-1)b \\ S_3 = 17 = a + 2b = a + (3-1)b \\ S_4 = 22 = a + 3b = a + (4-1)b \\ S_5 = 27 = a + 4b = a + (5-1)b \\ S_6 = 32 = a + 5b = a + (6-1)b \end{array}\right\} \qquad \boxed{S_n = a + (n-1)b}$$

a : suku pertama atau S_1
b : pembeda
n . indeks suku

Berdasarkan rumus di atas, dengan mudah dan cepat kita dapat menghitung nilai-nilai suku tertentu. Sebagai contoh, nilai suku ke-10 dan ke-23 dari deret hitung ini masing-masing adalah :

$$S_{10} = a + (n-1)b = 7 + (10-1)5 = 7 + 45 = 52.$$
$$S_{23} = a + (n-1)b = 7 + (23-1)5 = 7 + 110 = 117.$$

4.1.2 Jumlah *n* suku

Jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu tak lain adalah jumlah nilai suku-sukunya, sejak suku pertama (S_1, atau a) sampai dengan suku ke-*n* (S_n) yang bersangkutan.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$J_5 = \sum_{i=1}^{5} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$J_6 = \sum_{i=1}^{6} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

Berdasarkan rumus $S_n = a + (n - 1)b$ sebelumnya, maka masing-masing S_i dapat diuraikan. Dengan menguraikan setiap S_i maka J_4, J_5, dan J_6 dalam ilustrasi di atas akan menjadi masing-masing sebagai berikut :

$$\begin{aligned} J_4 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) \\ &= 4a + 6b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_5 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) \\ &= 5a + 10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_6 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) \\ &= 6a + 15b \end{aligned}$$

Masing-masing J_i ini dapat pula ditulis-ulang dalam bentuk sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} J_4 &= 4a + 6b = 4a + \frac{4}{2}(4 - 1)b \\ J_5 &= 5a + 10b = 5a + \frac{5}{2}(5 - 1)b \\ J_6 &= 6a + 15b = 6a + \frac{6}{2}(6 - 1)b \end{aligned}\right\} \quad J_n = na + \frac{n}{2}(n - 1)b$$

$$\text{atau } J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\}$$

Rumus $J_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\}$ ini masih bisa disederhanakan lagi menjadi seperti berikut :

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\} \\ &= \frac{n}{2}\{a + \underbrace{a + (n - 1)b}_{S_n}\} \\ &= \frac{n}{2}(a + S_n) \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk menghitung jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu n, terdapat empat bentuk rumus yang bisa digunakan :

$$\boxed{\begin{array}{ll} J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i & J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\} \\ J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) & J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b \end{array}}$$

Untuk kasus deret hitung dalam Contoh 1) di atas tadi, jumlahnya sampai dengan suku ke-10 adalah :

$$J_{10} = \frac{10}{2}(7 + S_{10}) = 5(7 + 52) = 295.$$

Sedangkan untuk kasus deret hitung dalam Contoh 2), jumlahnya sampai dengan suku ke-10 adalah :

$$J_{10} = (10)(93) + \frac{10}{2}(10 - 1)(-10) = 930 + 5(9)(-10) = 480.$$

4.2 DERET UKUR

Deret ukur ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku sebuah deret ukur dinamakan pengganda, yakni merupakan hasilbagi nilai suatu suku terhadap nilai suku di depannya.

Contoh :

1) 5, 10, 20, 40, 80, 160 (pengganda = 2)
2) 512, 256, 128, 64, 32, 16 (pengganda = 0,5)

4.2.1 Suku ke-n dari DU

Untuk dapat membentuk rumus penghitungan suku tertentu dari sebuah deret ukur, perhatikan Contoh 1) di atas yang disajikan dalam bentuk lain di bawah ini.

$$\left.\begin{array}{lllll} S_1 = & 5 = a & & & \\ S_2 = & 10 = ap & & = & ap^{2-1} \\ S_3 = & 20 = app & = ap^2 & = & ap^{3-1} \\ S_4 = & 40 = appp & = ap^3 & = & ap^{4-1} \\ S_5 = & 80 = apppp & = ap^4 & = & ap^{5-1} \\ S_6 = & 160 = appppp & = ap^5 & = & ap^{6-1} \end{array}\right\} \quad \boxed{S_n = ap^{n-1}}$$

a : suku pertama
p : pengganda
n : indeks suku

Berdasarkan rumus di atas, nilai suku ke-10 dari deret ukur dalam Contoh 1) dan Contoh 2) di atas masing-masing adalah :

1) $S_{10} = (5)(2)^{10-1} = (5)(2)^9 = (5)(512) = 2560.$
2) $S_{10} = (512)(0{,}5)^{10-1} = (512)(0{,}5)^9 = (512)(1/512) = 1.$

4.2.2 Jumlah n suku

Seperti halnya dalam deret hitung, jumlah sebuah deret ukur sampai dengan suku tertentu adalah jumlah nilai suku-sukunya sejak suku pertama sampai dengan suku ke-n yang bersangkutan.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots\ldots + S_n$$

Berdasarkan $S_n = ap^{n-1}$, maka masing-masing S_i dapat dijabarkan sehingga :

$$J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots\ldots + ap^{n-2} + ap^{n-1} \qquad (1)$$

Jika persamaan (1) ini kita kalikan dengan bilangan pengganda p, maka :

$$pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \ldots\ldots + ap^{n-1} + ap^n \qquad (2)$$

Dengan mengurangkan persamaan (2) dari persamaan (1), diperoleh selisih antara kedua persamaan ini yaitu :

$$J_n - pJ_n = a - ap^n$$
$$J_n(1 - p) = a(1 - p^n)$$

Dari sini, kita dapat membentuk rumus jumlah deret ukur sampai dengan suku ke-n, yakni :

$$\boxed{J_n = \frac{a(1 - p^n)}{1 - p} \quad \text{atau} \quad J_n = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1}}$$

Dalam hal $|p| < 1$, penggunaan rumus yang di sebelah kiri akan lebih mempermudah perhitungan. Di lain pihak jika $|p| > 1$, perhitungan akan menjadi lebih mudah dengan menggunakan rumus yang di sebelah kanan.

Untuk kasus deret ukur dalam Contoh 1) di atas, di mana $a = 5$ dan $p = 2$, jumlahnya sampai dengan suku ke-10 adalah :

$$J_{10} = \frac{5(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{5(1023)}{1} = 5115.$$

Sedangkan untuk kasus dalam Contoh 2), dalam hal ini $a = 512$ dan $p = 0{,}5$, jumlah dari sepuluh suku pertamanya adalah :

$$J_{10} = \frac{512\,(1 - 0{,}5^{10})}{1 - 0{,}5} = \frac{512\,(1023/1024)}{0{,}5} = 1023$$

Sebagaimana akan dapat dijumpai dalam bagian atau bab-bab selanjutnya dalam buku ini, prinsip-prinsip deret banyak diterapkan untuk menelaah perilaku bisnis dan ekonomi, baik secara langsung maupun secara tidak langsung. Prinsip deret hitung banyak diterapkan dalam menganalisis perilaku perkembangan. Sedangkan prinsip deret ukur, bersama-sama dengan konsep logaritma, sering digunakan untuk menganalisis perilaku pertumbuhan.

Latihan Deret

1. Dari sebuah deret hitung yang suku pertamanya 200 dan pembeda antar-suku-sukunya 25, hitunglah :
   (a) S_5 (c) J_5
   (b) S_{10} (d) J_{10}
2. Hitunglah S_4, S_{15} dan J_{10} dari suatu deret hitung yang suku pertamanya 1000 dan pembeda antar-sukunya -50.
3. Jika $a = 100$ dan $S_7 = 160$, berapa :
   (a) b ? (c) n untuk $S_n = 250$?
   (b) S_{11} ? (d) J_{16} ?
4. Jika S_3 dan S_7 dari sebuah deret hitung masing-masing adalah 50 dan 70, berapa :
   (a) S_1 ? (c) J_5 ?
   (b) S_{10} ? (d) J_{178} ?
5. Untuk $S_6 = 24.000$ dan $S_{10} = 18.000$, hitunglah :
   (a) b (c) J_{21}
   (b) n untuk $S_n = 0$ (d) J_{22}
6. Untuk $S_5 = 70$ dan $J_7 = 462$, hitunglah :
   (a) a (c) S_{12}
   (b) b (d) J_{10}
7. Berapa a dan b jika $J_3 = 180$ dan $S_4 = 0$?
8. Deret hitung X mempunyai nilai $a = 180$ dan $b = -10$, sedangkan deret hitung Y mempunyai nilai $a = 45$ dan $b = 5$. Pada suku keberapa kedua deret ini mempunyai nilai yang sama ?
9. Suku pertama deret hitung M adalah 75 dan pembedanya 10, sementara suku ke-6 deret hitung N adalah 145 dan pembedanya 5. Carilah n yang memberikan nilai yang sama bagi suku-suku kedua deret tersebut.

$x3 \quad x3 \quad x3$

10. Dari sebuah deret ukur yang suku-sukunya 10, 30, 90, 270, ..., hitunglah :
    (a) S_6 $S_n = ar^{n-1}$ (d) J_6
    (b) S_{10} (e) J_{10}
    (c) S_{15} (f) J_{15}

11. Apabila suku ke-3 dan suku ke-7 dari sebuah deret ukur masing-masing adalah 800 dan 204.800, berapa :
    (a) a ?   (c) S_5 ?
    (b) p ?   (d) J_5 ?

12. Pengganda sebuah deret ukur diketahui sebesar 5. Jika $S_6 = 6.250$, hitunglah :
    (a) S_1 (c) J_5
    (b) S_8 (d) J_8

13. Hitunglah :
    (a) S_5 (c) S_6
    (b) J_5 (d) J_6
    dari sebuah deret ukur yang suku awalnya 3 dan $p = -2$.

14. Deret ukur X mempunyai nilai $a = 512$ dan $p = 0,5$, sedangkan deret ukur Y mempunyai nilai $S_3 = 16$ dan $p = 4$. Pada suku keberapa nilai suku-suku dari kedua deret ini sama ?

15. Sebuah deret hitung memiliki nilai-nilai $a = 4.484$ dan $b = 1.234$. Sementara itu pada saat yang sama, sebuah deret ukur mempunyai nilai-nilai $S_5 = 486$ dan $S'_{10} = 118.098$.
    (a) Pada suku keberapa suku-suku dari kedua jenis deret ini sama ?
    (b) Mana yang lebih besar antara S_5 DH dan S_5 DU dalam kasus ini ?

4.3 PENERAPAN EKONOMI

Di bidang bisnis dan ekonomi, teori atau prinsip-prinsip deret sering diterapkan dalam kasus-kasus yang menyangkut perkembangan dan pertumbuhan. Apabila perkembangan atau pertumbuhan suatu gejala tertentu berpola seperti perubahan nilai-nilai suku sebuah deret, baik deret hitung ataupun deret ukur, maka teori deret yang bersangkutan penad (*relevant*) diterapkan untuk menganalisisnya.

4.3.1 Model Perkembangan Usaha

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha — misalnya produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, atau penanaman modal — berpola seperti deret hitung, maka prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisis perkembangan variabel tersebut.

Berpola seperti deret hitung maksudnya di sini ialah bahwa variabel yang bersangkutan bertambah secara konstan dari satu periode ke periode berikutnya.

Kasus 1*)

Perusahaan genteng "Sokajaya" menghasilkan 3.000 buah genteng pada bulan pertama produksinya. Dengan penambahan tenaga kerja dan peningkatan produktivitas, perusahaan mampu menambah produksinya sebanyak 500 buah setiap bulan. Jika perkembangan produksinya konstan, berapa buah genteng yang dihasilkannya pada bulan kelima ? Berapa buah yang telah dihasilkan sampai dengan bulan tersebut ?

$$\left.\begin{array}{l} a = 3.000 \\ b = 500 \\ n = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_5 = 3.000 + (5-1)500 = 5.000 \\ J_5 = \dfrac{5}{2}(3.000 + 5.000) = 20.000 \end{array}$$

Jumlah produksi pada bulan kelima adalah 5.000 buah, sedangkan jumlah seluruh genteng yang dihasilkan sampai dengan bulan tersebut 20.000 buah.

Kasus 2

Besarnya penerimaan PT "Cemerlang" dari hasil penjualan barangnya Rp 720 juta pada tahun kelima dan Rp 980 juta pada tahun ketujuh. Apabila perkembangan penerimaan penjualan tersebut berpola seperti deret hitung, berapa perkembangan penerimaannya per tahun ? Berapa besar penerimaan pada tahun pertama dan pada tahun keberapa penerimaannya sebesar Rp 460 juta ?

Dalam jutaan : $S_7 = 980 \rightarrow a + 6b = 980$

$S_5 = 720 \rightarrow a + 4b = 720$

$2b = 260 \rightarrow b = 130$

Perkembangan penerimaan per tahun sebesar Rp 130 juta.

$a + 4b = 720 \rightarrow a = 720 - 4b = 720 - 4(130) = 200$

Penerimaan pada tahun pertama sebesar Rp 200 juta.

$S_n = a + (n-1)b \rightarrow 460 = 200 + (n-1)\,130$

$460 = 200 + 130\,n - 130$

$390 = 130\,n \rightarrow n = 3$

Penerimaan sebesar Rp 460 juta diterima pada tahun ketiga.

---

*) Dalam buku ini, untuk contoh soal-soal matematik murni digunakan istilah "Contoh", sedangkan untuk contoh soal-soal matematik terapan digunakan istilah "Kasus". Nomor urut "Kasus" berlanjut terus setamat buku.

4.3.2. Model Bunga Majemuk

Model bunga majemuk merupakan penerapan deret ukur dalam kasus simpan-pinjam dan kasus investasi. Dengan model ini dapat dihitung, misalnya, besarnya pengembalian kredit di masa datang berdasarkan tingkat bunganya. Atau sebaliknya, untuk mengukur nilai sekarang dari suatu jumlah hasil investasi yang akan diterima di masa datang.

Jika misalnya modal pokok sebesar P dibungakan secara majemuk dengan suku bunga per tahun setingkat i, maka jumlah akumulatif modal tersebut di masa datang setelah n tahun (F_n) dapat dihitung sebagai berikut :

setelah 1 tahun : $F_1 = P + P.i = P(1 + i)$
setelah 2 tahun : $F_2 = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$
setelah 3 tahun : $F_3 = P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 i = P(1 + i)^3$

setelah n tahun : $F_n = (\ldots\ldots) + (\ldots\ldots) i = P(1 + i)^n$

Dengan demikian, jumlah di masa datang dari suatu jumlah sekarang adalah :

$$\boxed{F_n = P(1 + i)^n}$$

P : jumlah sekarang
i : tingkat bunga per tahun
n : jumlah tahun

[Bandingkan rumus ini dengan rumus deret ukur $S_n = ap^{n-1}$, keduanya identik. P atau F_0 di sini identik dengan a atau S_1 dalam rumus deret ukur, $(1 + i)$ identik dengan p dalam deret ukur. Ringkasnya, F_n di sini identik dengan S_{n+1} dalam deret ukur].

Rumus di atas mengandung anggapan tersirat bahwa bunga diperhitungkan dibayarkan satu kali dalam setahun. Apabila bunga diperhitungkan dibayarkan lebih dari satu kali (misalnya m kali, masing-masing i/m per termin) dalam setahun, maka jumlah di masa datang menjadi :

$$\boxed{F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}$$

m : frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Suku $(1 + i)$ dan $\left(1 + \frac{i}{m}\right)$ dalam dunia bisnis dinamakan "faktor bunga majemuk" (*compounding interest factor*), yaitu suatu bilangan lebih besar dari 1 yang dapat dipakai untuk menghitung jumlah di masa datang dari suatu jumlah sekarang.

Dari rumus di atas, dengan sedikit manipulasi matematis, dapat pula dihitung besarnya nilai sekarang apabila yang diketahui jumlahnya di masa datang. Nilai sekarang *(present value)* dari suatu jumlah uang tertentu di masa datang adalah :

$$\boxed{P = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot F} \quad \text{atau} \quad \boxed{P = \frac{1}{(1+i/m)^{mn}} \cdot F}$$

Suku $1/(1+i)^n$ dan $1/(1+i/m)^{mn}$ dinamakan "faktor diskonto" *(discount factor)*, yaitu suatu bilangan lebih kecil dari 1 yang dapat dipakai untuk menghitung nilai sekarang dari suatu jumlah di masa datang.

Kasus 3

Seorang nasabah meminjam uang di bank sebanyak Rp 5 juta untuk jangka waktu 3 tahun, dengan tingkat bunga 2% per tahun. Berapa jumlah seluruh uang yang harus dikembalikannya pada saat pelunasan ? Seandainya perhitungan pembayaran bunga bukan tiap tahun, melainkan tiap semester, berapa jumlah yang harus ia kembalikan ?

$$\left.\begin{aligned} P &= 5.000.000 \\ n &= 3 \\ i &= 2\% = 0{,}02 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F_n &= P(1+i)^n \\ F_3 &= 5.000.000\,(1+0{,}02)^3 \\ &= 5.000.000\,(1{,}061208) = 5.306.040 \end{aligned}$$

Jadi pada saat pelunasan, setelah tiga tahun, nasabah tadi secara keseluruhan harus mengembalikan sebanyak Rp 5.306.040,00. Seandainya bunga diperhitungkan dibayarkan tiap semester, $m = 2$, maka :

$$\begin{aligned} F_n = P(1+i/m)^{mn} \rightarrow F_3 &= 5.000.000\,(1+0{,}01)^6 \\ &= 5.000.000\,(1{,}06152) = 5.307.600 \end{aligned}$$

Jumlah yang harus dikembalikan menjadi lebih besar, Rp 5.307.600,00.

Kasus 4

Tabungan seorang mahasiswa akan menjadi sebesar Rp 532.400,00 tiga tahun yang akan datang. Jika tingkat bunga bank yang berlaku 10% per tahun, berapa tabungan mahasiswa tersebut pada saat sekarang ini ?

$$\left.\begin{aligned} F &= 532.400 \\ n &= 3 \\ i &= 10\% = 0{,}1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} P &= \frac{1}{(1+i)^n} \cdot F \\ &= \frac{1}{(1+0{,}1)^3} \cdot 532.400 = 400.000 \end{aligned}$$

Jadi besarnya tabungan sekarang adalah Rp 400.000,00.

4.3.3 Model Pertumbuhan Penduduk

Penerapan deret ukur yang paling konvensional di bidang ekonomi adalah dalam hal penaksiran jumlah penduduk. Sebagaimana pernah dinyatakan oleh *Malthus,* penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur. Secara matematik, hal ini dapat dirumuskan sebagai :

$$\boxed{P_t = P_1 R^{t-1}}$$

di mana $R = 1 + r$

P_1 : jumlah pada tahun pertama (basis)
P_t : jumlah pada tahun ke-t
r : persentase pertumbuhan per tahun
t : indeks waktu (tahun)

Kasus 5

Penduduk suatu kota berjumlah 1 juta jiwa pada tahun 1991, tingkat pertumbuhannya 4 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2006. Jika mulai tahun 2006 pertumbuhannya menurun menjadi 2,5%, berapa jumlahnya 11 tahun kemudian ?

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 1 \text{ juta} \\ r &= 0{,}04 \\ R &= 1{,}04 \end{aligned}\right\} \quad P \text{ tahun } 2006 \equiv P_{16} = 1 \text{ juta } (1{,}04)^{15} = 1 \text{ juta } (1{,}800943) = 1.800.943 \text{ jiwa}$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 1.800.943 \\ r &= 0{,}025 \\ R &= 1{,}025 \end{aligned}\right\} \quad P \text{ 11 tahun kemudian} \equiv P_{11}$$

$$P_{11} = 1.800.943\,(1{,}025)^{10} = 2.305.359 \text{ jiwa}$$

atau dengan memanfaatkan kaidah logaritma :

$$\begin{aligned} P_{11} &= 1.800.943\,(1{,}025)^{10} \\ \log P_{11} &= \log 1.800.943\,(1{,}025)^{10} \\ \log P_{11} &= \log 1.800.943 + 10 \log 1{,}025 \\ \log P_{11} &= 6{,}255499 + 0{,}107239 \\ \log P_{11} &= 6{,}362738 \rightarrow P_{11} = 2.305.359 \end{aligned}$$

BAGIAN DUA
HUBUNGAN FUNGSIONAL

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

BAB 5
FUNGSI

Pemahaman akan konsep fungsi sangat penting dalam mempelajari disiplin ilmu ekonomi, mengingat telaah-telaah ekonomi banyak bekerja dengan fungsi. Baik fungsi yang berbentuk persamaan maupun yang berbentuk pertidaksamaan. Yang dimaksud dengan fungsi berbentuk persamaan di sini ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda kesamaan (=), sedangkan fungsi berbentuk pertidaksamaan ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan ($\leqslant$ atau $\geqslant$). Bab ini menguraikan segala hal yang berkaitan dengan konsep fungsi secara umum, dalam hal ini fungsi-fungsi yang berbentuk persamaan. Uraian yang lebih terinci mengenai fungsi-fungsi tertentu disajikan di dalam bab-bab berikutnya, sekaligus dengan bahasan mengenai penerapan ekonomi dari fungsi yang bersangkutan.

5.1 PENGERTIAN DAN UNSUR-UNSUR FUNGSI

Fungsi. Fungsi ialah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain. Sebuah fungsi dibentuk oleh beberapa unsur. Unsur-unsur pembentuk fungsi adalah variabel, koefisien dan konstanta. Variabel dan koefisien senantiasa terdapat dalam setiap bentuk fungsi. Akan tetapi tidak demikian halnya dengan konstanta. Sebuah fungsi, yang secara kongkret dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan, mungkin sekali mengandung sebuah konstanta dan mungkin pula tidak. Walaupun sebuah persamaan atau sebuah pertidaksamaan tidak mengandung konstanta, tidaklah mengurangi artinya sebagai sebuah fungsi.

Variabel. Variabel ialah unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu, dilambangkan (berdasarkan kesepakatan umum) dengan huruf-huruf Latin. Dalam matematika, variabel-variabel dalam sebuah persamaan lazimnya ditulis dengan huruf-huruf kecil, melambangkan sumbu-sumbu dalam sistem koordinat (absis dan ordinat). Dalam ekonomika, tidak terdapat ketentuan bahwa variabel dalam suatu persamaan harus dituliskan dengan huruf kecil. Berdasarkan kedudukan atau sifatnya, di dalam setiap fungsi terdapat dua macam variabel yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas (*independent variable*) ialah variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain, sedangkan variabel terikat (*independent variable*) ialah variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain.

Koefisien dan Konstanta. Koefisien ialah bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam sebuah fungsi. Adapun konstanta ialah bilangan atau angka yang (kadang-kadang) turut membentuk sebuah fungsi tetapi berdiri sendiri sebagai bilangan dan tidak terkait pada suatu variabel tertentu.

Notasi sebuah fungsi secara umum	:	$y = f(x)$
Contoh kongkret	:	$y = 5 + 0{,}8\,x$
Atau, karena $y = f(x)$, bisa pula	:	$f(x) = 5 + 0{,}8\,x$

Bentuk $y = f(x)$ di atas berarti menyatakan bahwa y merupakan fungsi x, besar kecilnya nilai y tergantung pada atau fungsional terhadap nilai x. Masing-masing x dan y adalah variabel. Dalam hal ini, x adalah variabel bebas karena nilainya tidak tergantung pada nilai variabel lain (y) dalam fungsi tersebut. Sebaliknya, y adalah variabel terikat karena nilainya tergantung pada nilai x. Angka 0,8 adalah koefisien variabel x, karena ia terkait pada variabel tersebut. Pada variabel y sesungguhnya terkandung sebuah koefisien lagi, yang besarnya sama dengan 1. Namun karena angka 1 di depan sebuah variabel biasanya tidak dituliskan, maka koefisien 1 yang terkait pada variabel y itu seakan-akan tidak ada. Angka 5 dalam persamaan di atas adalah sebuah konstanta.

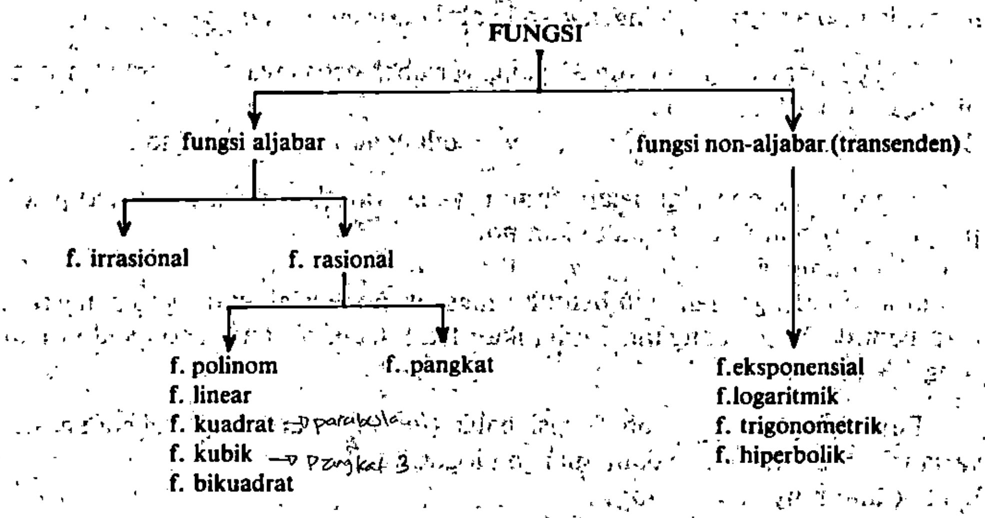
Catatan :

Tentang koefisien dan konstanta. Karena baik koefisien maupun konstanta sama-sama berupa bilangan, kedua istilah ini sering tercampuraduk. Banyak buku-teks bahkan hanya menggunakan satu istilah yang sama, dalam hal ini konstanta, baik untuk menyebut bilangan yang tidak terkait maupun yang terkait pada sesuatu variabel. Meskipun pencampuradukan demikian tidak merupakan penyimpangan yang berarti, namun menempatkan segala sesuatu sesuai pada proporsinya tetap lebih baik.

Tentang variabel. Selain variabel bebas dan variabel terikat, di dalam statistika dan ekonometrika dikenal pula berbagai sebutan untuk variabel-variabel dalam sebuah persamaan, antara lain : "regresor" dan "regresan", "variabel penjelaskan" dan "variabel yang dijelaskan", serta "variabel eksogen" dan "variabel endogen".

5.2 JENIS-JENIS FUNGSI

Fungsi dapat digolong-golongkan menjadi beberapa kelompok. Secara garis besar fungsi dikelompokkan atas kelompok fungsi aljabar dan kelompok fungsi non-aljabar. Rincian jenis-jenis fungsi selengkapnya dapat dilihat pada Skema 2 di halaman berikut:*).



Skema 2 : Pembagian Jenis Fungsi

Fungsi polinom ialah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinom adalah : $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Pangkat tertinggi pada variabel suatu fungsi polinom mencerminkan derajat polinomnya, sekaligus juga mencerminkan derajat persamaan atau fungsi tersebut.

Fungsi linear ialah fungsi polinom khusus yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu, oleh karenanya sering juga disebut fungsi berderajat satu. Bentuk umum persamaan linear adalah : $y = a_0 + a_1 x$; di mana a_0 adalah konstanta dan $a_1 \neq 0$. Fungsi-fungsi lain yang pangkat tertinggi dari variabelnya lebih dari satu, secara umum disebut fungsi non-linear; ini meliputi fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi bikuadrat dan seterusnya.

*)H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, "Pengantar Matematika untuk Ekonomi", Jakarta, LP3ES 1980, halaman 82.

Fungsi kuadrat ialah fungsi polinom yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua, sering juga disebut fungsi berderajat dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah : $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; di mana a_0 adalah konstanta, sedangkan a_1 dan a_2 adalah koefisien, $a_2 \neq 0$.

Fungsi berderajat n ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat n (n = bilangan nyata).
Bentuk umumnya : $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$; di mana a_0 adalah konstanta, a_1 hingga a_n adalah koefisien, dan $a_n \neq 0$.

Fungsi pangkat ialah fungsi yang variabel bebasnya berpangkat sebuah bilangan nyata bukan nol.
Bentuk umumnya : $y = x^n$ n = bilangan nyata bukan nol.

Fungsi eksponensial ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari suatu konstanta bukan nol.
Bentuk umumnya : $y = n^x$ $n > 0$.
(Bandingkan pengertian atau bentuk fungsi eksponensial ini dengan pengertian atau bentuk fungsi pangkat. Perhatikan letak-letak n dan x pada kedua jenis fungsi tersebut).

Fungsi logaritmik ialah fungsi balik (*inverse*) dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritmik.
Bentuk umumnya : $y = {}^n\log x$.

Fungsi trogonometrik dan fungsi hiperbolik ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan bilangan-bilangan goneometrik.
Contoh persamaan trigonometrik : $y = \sin 5x$
Contoh persamaan hiperbolik : $y = \text{arc} \cos 2x$.

Selain pembagian jenis fungsi sebagaimana yang baru saja diuraikan di atas, berdasarkan letak ruas variabel-variabelnya fungsi dibedakan menjadi dua jenis yaitu *fungsi eksplisit* dan *fungsi implisit*. Fungsi eksplisit ialah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di ruas yang berlainan. Sedangkan fungsi implisit ialah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di satu ruas yang sama, di ruas kiri semua atau di ruas kanan semua. Secara operasional, bentuk umum persamaan fungsi yang eksplisit dan yang implisit dapat dilihat sebagai berikut :

Fungsi	Bentuk Eksplisit	Bentuk Implisit
Umum	$y = f(x)$	$f(x, y) = 0$
Linear	$y = a_0 + a_1 x$	$a_0 + a_1 x - y = 0$
Kuadrat	$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - y = 0$
Kubik	$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - y = 0$

Setiap fungsi yang berbentuk eksplisit senantiasa dapat diimplisitkan, tetapi tidak semua fungsi implisit dapat diubah menjadi bentuk eksplisit. Sebagai contoh, persamaan implisit $x^2 - 5^x + y^2 - 3^y = 0$ adalah mustahil untuk dieksplisitkan.

5.3 PENGGAMBARAN FUNGSI LINEAR

Setiap fungsi — yang berbentuk eksplisit, atau bisa dieksplisitkan — dapat disajikan secara grafik pada bidang sepasang sumbu silang (sistem koordinat). Gambar yang dihasilkannya mungkin berupa garis lurus atau berupa kurva, tergantung pada jenis fungsi yang bersangkutan. Gambar dari sebuah fungsi dapat dihasilkan dengan cara menghitung koordinat titik-titik yang memenuhi persamaannya, dan kemudian memindahkan pasangan-pasangan titik tersebut ke sistem sumbu silang. Dalam menggambarkan suatu fungsi terdapat kebiasaan meletakkan variabel bebas pada sumbu horizontal (absis) dan variabel terikat pada sumbu vertikal (ordinat).

Penggambaran fungsi linear adalah yang paling mudah dilakukan. Sesuai dengan namanya, setiap fungsi linear akan menghasilkan sebuah garis lurus (boleh juga disebut kurva linear) jika digambarkan.

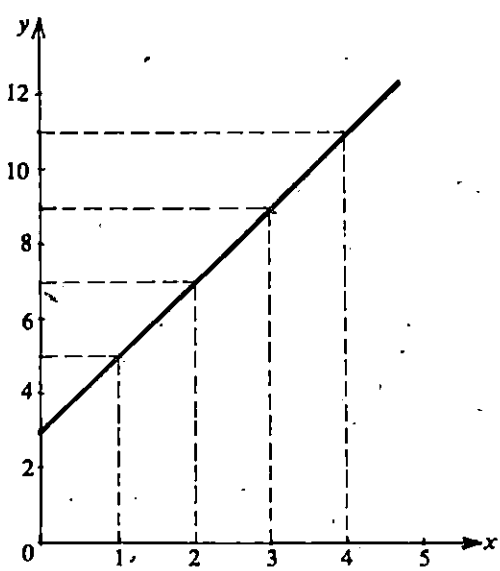
Contoh :

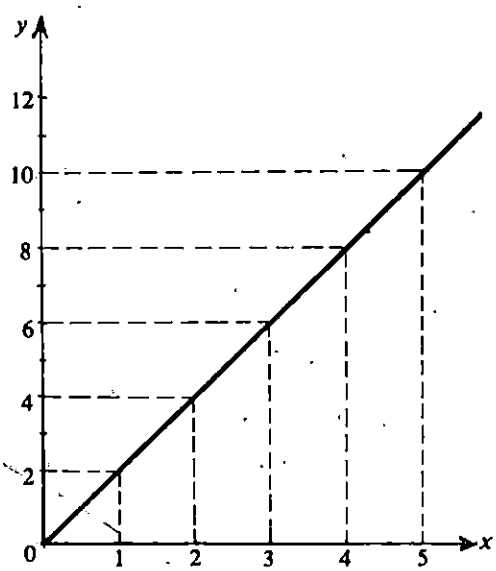
1) $y = 3 + 2x$

x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

2) $y = 2x$

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8





Gambar 5—1

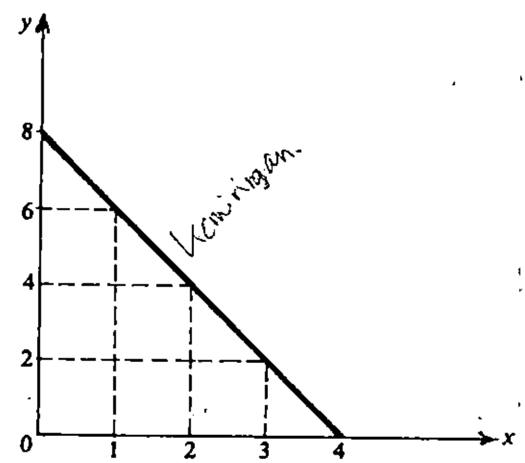
Dengan memberikan nilai-nilai tertentu untuk variabel bebas x, lalu disubstitusikan ke dalam persamaan fungsinya, akan diperoleh nilai-nilai variabel terikat y, sebagaimana dicontohkan oleh kolom-kolom x dan y di atas kedua gambar tersebut. Berdasarkan nilai-nilai (x, y) yang diperoleh dapatlah ditentukan koordinat titik-titiknya. Garis dari persamaan dapat digambarkan dengan menghubungkan koordinat atau pasangan titik-titik yang ada.

Pada persamaan linear $y = a + bx$, konstanta a adalah penggal (*intercept*) garis pada sumbu vertikal y, sedangkan koefisien b merupakan koefisien arah atau lereng (*slope*) garisnya. Dalam hal $a = 0$, maka garisnya tidak mempunyai penggal pada sumbu vertikal. Ini berarti bahwa garis yang bersangkutan bermula dari titik pangkal (0,0), sebagaimana terlihat pada Contoh 2) di atas.

Apabila koefisien arah b bernilai positif ($b > 0$), garisnya bergerak dari kiri-bawah ke kanan-atas, sebagaimana ditunjukkan oleh kedua contoh tadi. Akan tetapi jika koefisien arah tersebut bernilai negatif ($b < 0$), seperti diperlihatkan oleh Contoh 3) di bawah ini, garisnya akan bertolak dari kiri-atas ke kanan-bawah.

3) $y = \underset{a}{8} - \underset{b}{2}x$

x	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0



Gambar 5—2

Letak garis atau kurva dari sebuah fungsi linear tidak selalu di kuadran pertama, pada x positif dan y positif. Melainkan mungkin pula di kuadran II, III atau IV. Hal ini tergantung pada besar kecilnya — maksudnya positif atau negatif — nilai-nilai x dan y. Perlu dicatat, analisis matematik dalam ekonomi lebih memusatkan diri pada kuadran pertama.

Untuk memperoleh gambar dari sebuah fungsi linear, sesungguhnya tidak perlu menghitung terlalu banyak titik koordinat. Mengingat dengan dua buah titik saja sudah bisa dibentuk sebuah garis lurus, maka cukup dengan dua koordinat yang memenuhi persamaan yang bersangkutan kita sudah akan bisa menggambarkan kurvanya. Atau, lebih cepat lagi, melalui penggal dan lereng dalam persamaannya.

5.4 PENGGAMBARAN FUNGSI NON-LINEAR

Penggambaran fungsi non-linear tidak semudah fungsi linear. Meskipun prinsipnya secara umum sama, yakni dengan terlebih dahulu mencari sejumlah titik koordinat yang memenuhi persamaan fungsinya, namun prakteknya tidaklah mudah. Bukan saja karena kurvanya yang jelas akan tidak linear, sehingga relatif sulit untuk dilukiskan, tetapi juga karena terdapat tidak hanya satu macam fungsi non-linear. Masing-masing fungsi non-linear mempunyai bentuk khas mengenai kurvanya, sehingga harus diamati kasus demi kasus.

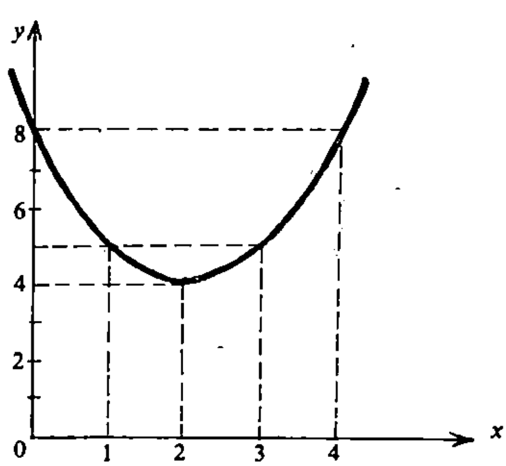
Di bawah ini diperlihatkan beberapa bentuk gambar dari fungsi non-linear, berdasarkan penggambaran melalui koordinat demi koordinat. Sesudah itu akan dibahas beberapa sifat tertentu kurva non-linear. Uraian lebih terinci mengenai fungsi non-linear dapat dijumpai di dalam bab tersendiri yang membahas tentang itu, yakni Bab 7 (Hubungan Non-Linear).

Contoh (peng)-gambar-(an) fungsi non-linear :

1) Fungsi kuadrat parabolik

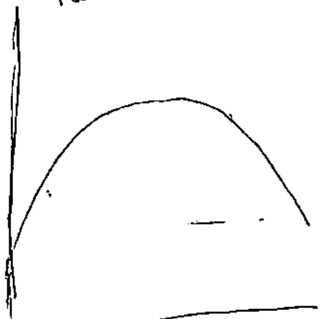
$y = 8 - 4x + x^2$

x	0	1	2	3	4
y	8	5	4	5	8



Gambar 5—3

kuadratic

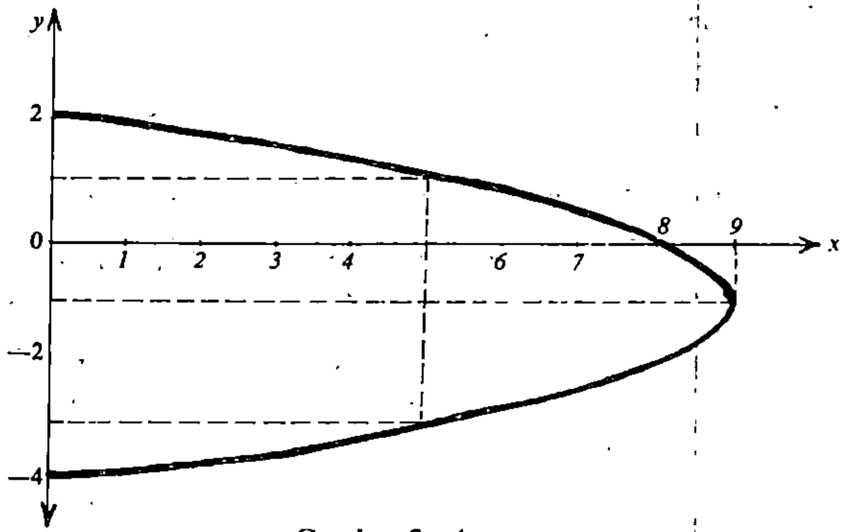


$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

2) Fungsi kuadrat parabolik

$x = 8 - 2y - y^2$

y	x
-4	0
-3	5
-2	8
-1	9
0	8
1	5
2	0

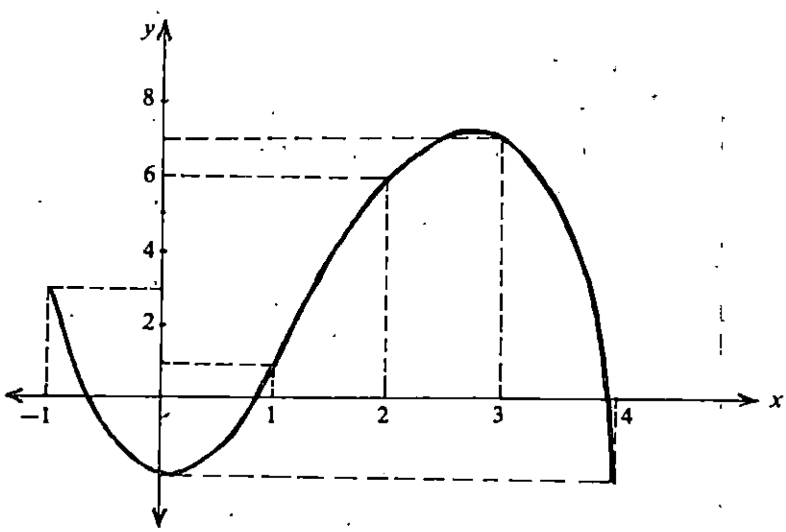


Gambar 5—4

3) Fungsi kubik

$y = -2 + 4x^2 - x^3$

x	y
-1	3
0	-2
1	1
2	6
3	7
4	-2



Gambar 5—5

Kurva non-linear mempunyai sifat-sifat tertentu. Melalui sifat-sifat khas ini dapat diantisipasi atau diketahui pola kurvanya. Berdasarkan pengetahuan akan sifat-sifat ini, penggambaran suatu fungsi non-linear dapat dilakukan dengan menggunakan lebih sedikit titik koordinat. Sifat-sifat kurva non-linear yang dibahas di sini meliputi penggal, simetri, perpanjangan, asimtot dan faktorisasi.

5.4.1 Penggal

Penggal sebuah kurva adalah titik-titik potong kurva tersebut pada sumbu-sumbu koordinat. Penggal pada sumbu x dapat dicari dengan memisalkan $y = 0$ dalam persamaan yang bersangkutan, sehingga nilai x dapat dihitung. Penggal pada sumbu y dicari dengan memisalkan $x = 0$, sehingga nilai y dapat dihitung.

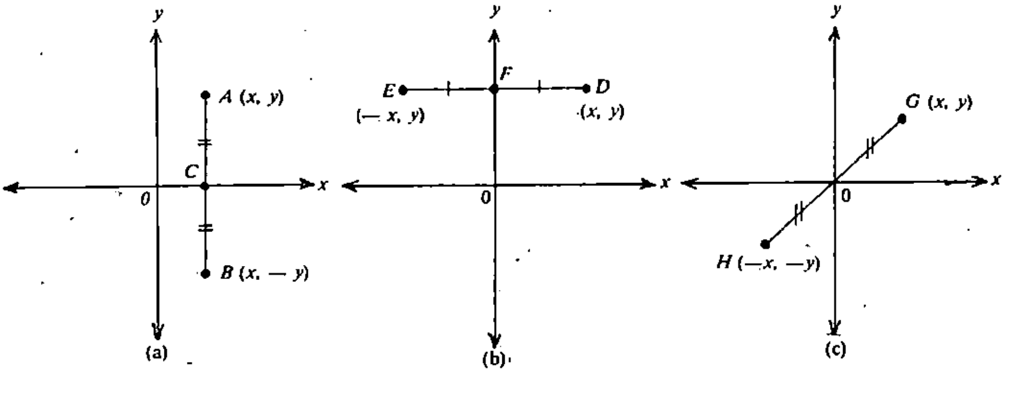
Contoh : $y = 16 - 8x + x^2$

Penggal pada sumbu x : $y = 0 \rightarrow x = 4$

Penggal pada sumbu y : $x = 0 \rightarrow y = 16$

5.4.2 Simetri

Dua buah titik dikatakan simetrik terhadap sebuah garis apabila garis tersebut berjarak sama terhadap kedua titik tadi dan tegaklurus terhadap segmen garis yang menghubungkannya. Dua buah titik dikatakan simetrik terhadap titik ketiga apabila titik ketiga ini terletak persis di tengah segmen garis yang menghubungkan kedua titik tadi.



Gambar 5—6

Pada Gambar 5—6(a), titik A dan titik B simetrik terhadap sumbu x karena sumbu ini berjarak sama terhadap A dan B serta tegak lurus terhadap segmen garis AB. A dan B simetrik pula terhadap C karena yang terakhir ini terletak persis di tengah segmen garis AB. Gambar 5—6(b) memperlihatkan titik D dan titik E simetrik terhadap sumbu y, serta terhadap titik F. Gambar paling kanan menunjukkan simetri G dan H terhadap titik pangkal O (0,0). Berdasarkan pembuktian-pembuktian grafis ini, dapat disimpulkan bahwa titik (x, y) adalah simetrik terhadap titik :

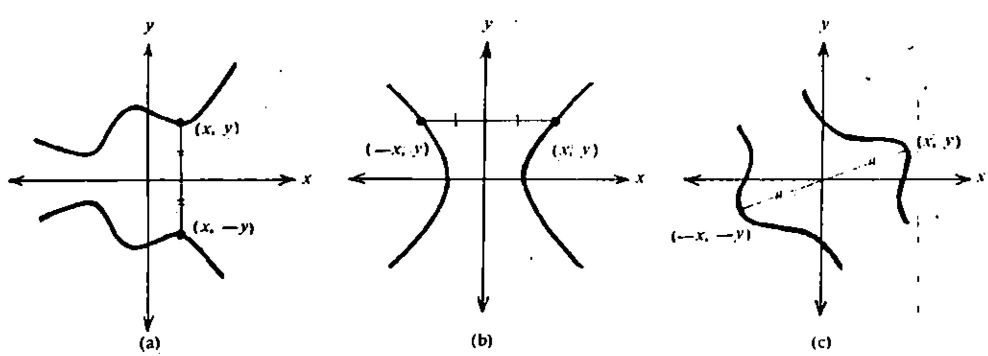
$(x, -y)$ sehubungan dengan sumbu x
$(-x, y)$ sehubungan dengan sumbu y
$(-x, -y)$ sehubungan dengan titik pangkal.

Bertolak dari kesimpulan-kesimpulan di atas, dapat pula ditarik kesimpulan mengenai simetri sebuah kurva terhadap sumbu-horizontal x, terhadap sumbu-vertikal y, atau terhadap titik pangkal.

- Sebuah kurva akan simetrik terhadap sumbu x jika untuk setiap titik (x, y) pada kurva itu titik simetri $(x, -y)$ juga terdapat kurva tersebut, yakni jika penggantian y oleh $-y$ dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.

- Sebuah kurva akan simetrik terhadap sumbu y jika untuk setiap titik (x, y) pada kurva itu titik simetri $(-x, y)$ juga terdapat pada kurva tersebut, yakni jika penggantian x oleh $-x$ dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.

- Sebuah kurva akan simetrik terhadap titik pangkal jika untuk setiap titik (x, y) pada kurva itu titik simetri $(-x, -y)$ juga terdapat pada kurva tersebut, yakni jika penggantian x oleh $-x$ dan y oleh $-y$ dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.



Gambar 5—7

Secara ringkas dapat dirumuskan bahwa kurva dari suatu persamaan $f(x, y) = 0$ adalah simetrik terhadap :

sumbu x jika $f(x, y) = f(x, -y) = 0$
sumbu y jika $f(x, y) = f(-x, y) = 0$
titik pangkal jika $f(x, y) = f(-x, -y) = 0$.

Sebuah kurva yang simetrik terhadap kedua sumbu x dan sumbu y, dengan sendirinya akan simetrik pula terhadap titik pangkal. Akan tetapi simetrik terhadap titik pangkal tidak berarti dengan sendirinya simetrik terhadap salah satu, apa lagi kedua, sumbu. Pada umumnya simetri dalam dua di antara tiga hal (sumbu x, sumbu y, dan titik pangkal) senantiasa membuahkan kesimetrian terhadap hal yang ketiga. Suatu kurva memiliki kemungkinan untuk simetrik terhadap tidak satupun, salah satu, atau ketiga hal tersebut: tetapi tidak akan pernah simetrik terhadap hanya dua hal saja.

Contoh:

1) Kurva dari persamaan $x^2 + y^2 - 5 = 0$
adalah simetrik terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal.

$f(x, -y) = x^2 + (-y)^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(x, -y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = (-x)^2 + y^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(-x, y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu y;

$f(-x, -y) = (-x)^2 + (-y)^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(-x, -y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap titik pangkal.

2) Kurva dari persamaan $x^4 + x^2y + 3y - 7 = 0$
simetrik hanya terhadap sumbu y, tetapi tidak simetrik terhadap sumbu x dan titik pangkal.

$f(x, -y) = x^4 - x^2y - 3y - 7$; $f(x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = x^4 + x^2y + 3y - 7$; $f(-x, y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu y.

$f(-x, -y) = x^4 - x^2y - 3y - 7$; $f(-x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap titik pangkal.

3) Selidikilah kesimetrian kurva yang dicerminkan oleh persamaan $3x^2 + 4x - 5y = 0$.

$f(x, -y) = 3x^2 + 4x + 5y$; $f(x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = 3x^2 - 4x - 5y$; $f(-x, y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu y.

$f(-x, -y) = 3x^2 - 4x + 5y$; $f(-x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap titik pangkal.

Jadi, kurva dari persamaan di atas tidak simetrik terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal.

Kesimetrian suatu kurva tidak selalu harus dilihat dari salah satu sumbu ataupun titik pangkal, tetapi dapat juga dibandingkan terhadap sebuah garis lurus tertentu (yang bukan merupakan sumbu dalam sistem koordinat) atau terhadap suatu titik tertentu (yang bukan merupakan titik pangkal).

5.4.3 Perpanjangan

Dalam menggambarkan kurva dari suatu persamaan $f(x, y) = 0$, pada umumnya kita membatasi diri hanya sampai nilai-nilai x dan y tertentu. Kita tidak tahu sampai seberapa jauh ujung-ujung kurva tersebut dapat diperpanjang, apakah sampai ke nilai-nilai x atau y tak terhingga ($\pm \infty$) ataukah terbatas hanya sampai nilai-nilai x atau y tertentu. Konsep perpanjangan dalam seksi ini akan menjelaskan apakah ujung-ujung sebuah kurva dapat terus menerus diperpanjang sampai tak terhingga (tidak terdapat batas perpanjangan), ataukah hanya dapat diperpanjang sampai nilai x atau y tertentu (terdapat batas perpanjangan).

Titik-titik (x, y) pada bidang sepasang sumbu-silang (sistem koordinat) sesungguhnya hanyalah mencerminkan koordinat-koordinat yang terdiri atas bilangan-bilangan nyata. Sistem koordinat tersebut tidak berlaku bagi titik-titik koordinat yang mengandung bilangan khayal. Jadi, nilai-nilai x untuk y yang berupa bilangan khayal dan nilai-nilai y untuk x yang berupa bilangan khayal tak dapat ditempatkan di situ, sehingga harus dikeluarkan dari bidang sepasang sumbu-silang tersebut.

Jika sebuah persamaan mengandung variabel berpangkat genap, maka penyelesaian untuk variabel yang bersangkutan akan melibatkan akar berpangkat genap. Konsekuensinya, perpanjangan kurva dari persamaan yang demikian boleh jadi terbatas, mengingat bilangan negatif di bawah tanda akar akan selalu menghasilkan bilangan khayal. Dalam menyelidiki terdapat atau tidaknya batas perpanjangan sebuah kurva, sebaiknya (jika dimungkinkan) persamaannya dieksplisitkan untuk masing-masing variabel agar dapat diketahui batas perpanjangan pada masing-masing variabel tersebut. Patut dicatat, kehadiran batas perpanjangan pada salah satu variabel dapat dengan sendirinya membatasi perpanjangan pada variabel lainnya.

Secara ringkas dapat dirumuskan bahwa kurva dari suatu persamaan $f(x, y) = 0$ adalah simetrik terhadap :

sumbu x jika $f(x, y) = f(x, -y) = 0$
sumbu y jika $f(x, y) = f(-x, y) = 0$
titik pangkal jika $f(x, y) = f(-x, -y) = 0$.

Sebuah kurva yang simetrik terhadap kedua sumbu x dan sumbu y, dengan sendirinya akan simetrik pula terhadap titik pangkal. Akan tetapi simetrik terhadap titik pangkal tidak berarti dengan sendirinya simetrik terhadap salah satu, apa lagi kedua, sumbu. Pada umumnya simetri dalam dua di antara tiga hal (sumbu x, sumbu y, dan titik pangkal) senantiasa membuahkan kesimetrian terhadap hal yang ketiga. Suatu kurva memiliki kemungkinan untuk simetrik terhadap tidak satupun, salah satu, atau ketiga hal tersebut: tetapi tidak akan pernah simetrik terhadap hanya dua hal saja.

Contoh:

1) Kurva dari persamaan $x^2 + y^2 - 5 = 0$
adalah simetrik terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal.

$f(x, -y) = x^2 + (-y)^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(x, -y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = (-x)^2 + y^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(-x, y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu y;

$f(-x, -y) = (-x)^2 + (-y)^2 - 5 = x^2 + y^2 - 5$; ternyata $f(-x, -y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap titik pangkal.

2) Kurva dari persamaan $x^4 + x^2y + 3y - 7 = 0$
simetrik hanya terhadap sumbu y, tetapi tidak simetrik terhadap sumbu x dan titik pangkal.

$f(x, -y) = x^4 - x^2y - 3y - 7$; $f(x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = x^4 + x^2y + 3y - 7$; $f(-x, y) = 0$ ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ simetrik terhadap sumbu y.

$f(-x, -y) = x^4 - x^2y - 3y - 7$; $f(-x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap titik pangkal.

3) Selidikilah kesimetrian kurva yang dicerminkan oleh persamaan $3x^2 + 4x - 5y = 0$:

$f(x, -y) = 3x^2 + 4x + 5y$; $f(x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu x.

$f(-x, y) = 3x^2 - 4x - 5y$; $f(-x, y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap sumbu y.

$f(-x, -y) = 3x^2 - 4x + 5y$; $f(-x, -y) = 0$ tidak ekivalen dengan $f(x, y) = 0$, berarti $f(x, y) = 0$ tidak simetrik terhadap titik pangkal.

Jadi, kurva dari persamaan di atas tidak simetrik terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal.

Kesimetrian suatu kurva tidak selalu harus dilihat dari salah satu sumbu ataupun titik pangkal, tetapi dapat juga dibandingkan terhadap sebuah garis lurus tertentu (yang bukan merupakan sumbu dalam sistem koordinat) atau terhadap suatu titik tertentu (yang bukan merupakan titik pangkal).

5.4.3 Perpanjangan

Dalam menggambarkan kurva dari suatu persamaan $f(x, y) = 0$, pada umumnya kita membatasi diri hanya sampai nilai-nilai x dan y tertentu. Kita tidak tahu sampai seberapa jauh ujung-ujung kurva tersebut dapat diperpanjang, apakah sampai ke nilai-nilai x atau y tak terhingga ($\pm \infty$) ataukah terbatas hanya sampai nilai-nilai x atau y tertentu. Konsep perpanjangan dalam seksi ini akan menjelaskan apakah ujung-ujung sebuah kurva dapat terus menerus diperpanjang sampai tak terhingga (tidak terdapat batas perpanjangan), ataukah hanya dapat diperpanjang sampai nilai x atau y tertentu (terdapat batas perpanjangan).

Titik-titik (x, y) pada bidang sepasang sumbu-silang (sistem koordinat) sesungguhnya hanyalah mencerminkan koordinat-koordinat yang terdiri atas bilangan-bilangan nyata. Sistem koordinat tersebut tidak berlaku bagi titik-titik koordinat yang mengandung bilangan khayal. Jadi, nilai-nilai x untuk y yang berupa bilangan khayal dan nilai-nilai y untuk x yang berupa bilangan khayal tak dapat ditempatkan di situ, sehingga harus dikeluarkan dari bidang sepasang sumbu-silang tersebut.

Jika sebuah persamaan mengandung variabel berpangkat genap, maka penyelesaian untuk variabel yang bersangkutan akan melibatkan akar berpangkat genap. Konsekuensinya, perpanjangan kurva dari persamaan yang demikian boleh jadi terbatas, mengingat bilangan negatif di bawah tanda akar akan selalu menghasilkan bilangan khayal. Dalam menyelidiki terdapat atau tidaknya batas perpanjangan sebuah kurva, sebaiknya (jika dimungkinkan) persamaannya dieksplisitkan untuk masing-masing variabel agar dapat diketahui batas perpanjangan pada masing-masing variabel tersebut. Patut dicatat, kehadiran batas perpanjangan pada salah satu variabel dapat dengan sendirinya membatasi perpanjangan pada variabel lainnya.

Contoh :

1) Selidiki apakah terdapat batas perpanjangan bagi kurva yang dicerminkan oleh persamaan $x^2 - y^2 - 25 = 0$

Penyelesaian untuk x : $x = \pm\sqrt{25 + y^2}$
Berapapun nilai y, bilangan di bawah tanda akar akan selalu positif sehingga x akan selalu berupa bilangan nyata. Berarti perpanjangan kurva searah sumbu y tidak terbatas.

Penyelesaian untuk y : $y = \pm\sqrt{x^2 - 25}$
Jika $x < 5$ atau $x > -5$ (ringkasnya: $|x| < 5$), bilangan di bawah tanda akar akan negatif dan y akan menjadi bilangan khayal atau maya (tidak nyata). Berarti perpanjangan kurva searah sumbu x terbatas hanya sampai $x = \pm 5$.

Jadi, dalam kasus contoh 1) ini, tidak terdapat batas perpanjangan bagi kurva untuk variabel x (searah sumbu y), tetapi terdapat batas perpanjangan untuk variabel y (searah sumbu x).

2) Selidiki apakah terdapat batas perpanjangan bagi kurva yang dicerminkan oleh persamaan $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Penyelesaian untuk x : $x = \pm\sqrt{25 - y^2}$
Jika $y > 5$ atau $y < -5$ (ringkasnya : $|y| > 5$), bilangan di bawah tanda akar akan negatif dan x akan menjadi bilangan khayal, sehingga tidak dapat ditempatkan pada sistem koordinat (Ingat bahwa sistem koordinat hanya berlaku bagi bilangan-bilangan nyata!). Berarti perpanjangan kurva searah sumbu y terbatas hanya sampai $y = \pm 5$, dengan perkataan lain perpanjangan tersebut terbatas hanya untuk interval $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

Penyelesaian untuk y : $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
Jika $|x| > 5$, maka y menjadi khayal. Sejalan dengan logika penjelasan di atas, perpanjangan kurva searah sumbu x terbatas hanya untuk interval $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

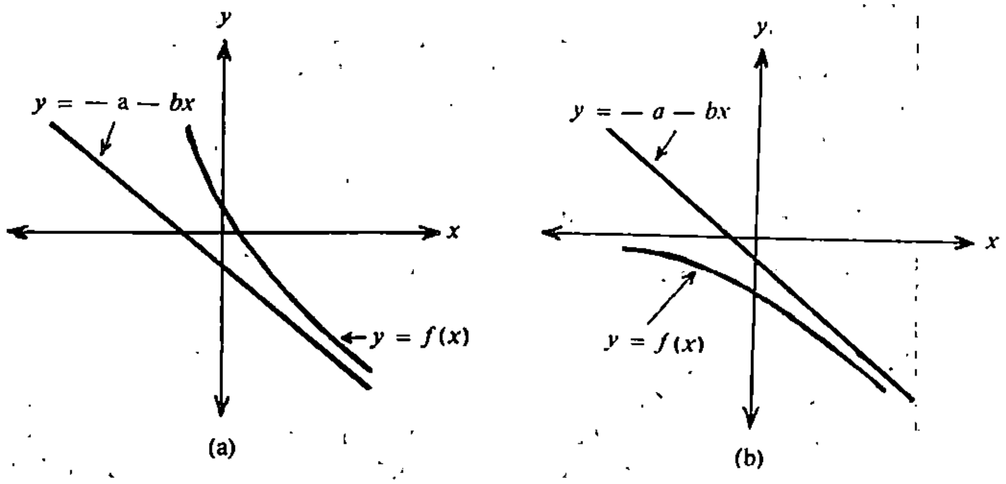
[Perhatikan bahwa dalam kasus Contoh 2) ini keterbatasan perpanjangan pada variabel x membatasi pula perpanjangan pada variabel y].

Konsep perpanjangan kurva mempunyai jalinan khusus dengan konsep asimtot, yang segera akan dibahas di dalam seksi berikut.

5.4.4 Asimtot

Asimtot suatu kurva adalah sebuah garis lurus yang jaraknya semakin dan semakin dekat dengan salah satu ujung kurva tersebut. Jarak itu sendiri tidak akan menjadi nol; atau dengan perkataan lain, garis lurus dan kurva tadi tidak sampai berpotongan. Jadi, suatu kurva dikatakan asimtotik terhadap sebuah garis lurus tertentu apabila salah satu ujung kurva semakin dan semakin mendekati garis yang bersangkutan.

Pembicaraan tentang asimtot tak dapat tidak melibatkan konsep limit. Secara umum, garis $y = a + bx$ merupakan asimtot kurva $y = f(x)$ jika $f(x)$ senantiasa lebih kecil atau senantiasa lebih besar dari $a + bx$ dan semakin mendekati $a + bx$ apabila x dan y diperpanjang tanpa batas. Dengan notasi limit, hal ini dituliskan sebagai $f(x) \rightarrow a + bx$ apabila $x, y \rightarrow \infty$

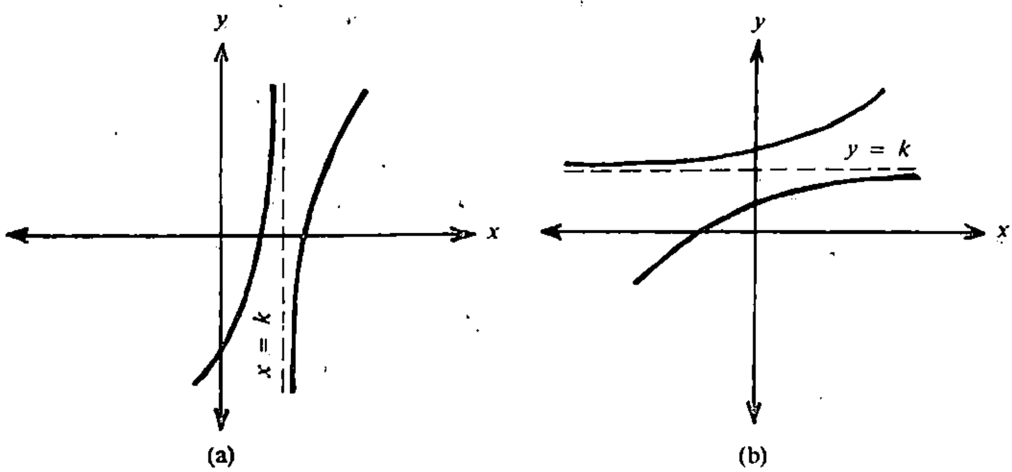


Gambar 5—8

Asimtot-asimtot yang sejajar atau berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat biasanya mendapat perhatian lebih khusus. Asimtot-asimtot horizontal dan vertikal ini didefinisikan sebagai berikut (perhatikan Gambar 5—9).

- Garis $x = k$ (k adalah konstanta) merupakan asimtot vertikal dari kurva $y = f(x)$ jika karena $y \rightarrow \infty$ maka $x \rightarrow k$ dan $x < k$ atau $x > k$ untuk setiap nilai x.

- Garis $y = k$ (k adalah konstanta) merupakan asimtot horizontal dari kurva $y = f(x)$ jika karena $x \rightarrow \infty$ maka $y \rightarrow k$ dan $y < k$ atau $y > k$ untuk setiap nilai y.

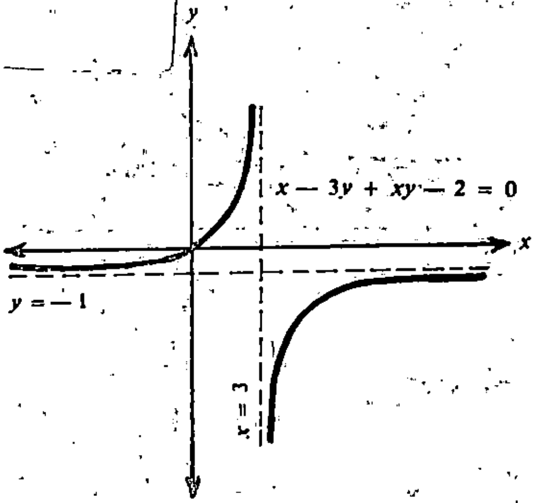


Gambar 5—9

Penyelidikan mengenai asimtot sangat berguna untuk mengetahui pola kelengkungan kurva yang akan digambarkan. Dengan demikian perlu diselidiki persamaannya untuk kasus x dan y membesar tanpa batas ($x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$) serta untuk kasus x dan y mengecil tanpa batas ($x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$). Nilai variabel yang tidak menaik atau menurun tanpa batas perlu pula diselidiki, guna menentukan apakah kurvanya mendekati asimtot dari kiri ataukah dari kanan [dalam hal asimtot vertikal, perhatikan Gambar 5—9(a)], atau apakah mendekati dari atas atau dari bawah [dalam hal asimtot horizontal, perhatikan Gambar 5—9(b)]. Dalam menyelidiki asimtot akan lebih mudah menyelesaikannya secara eksplisit untuk masing-masing variabel satu per satu, jika hal ini memungkinkan. Prosedur demikian, sebagaimana diterangkan sebelumnya dalam Seksi 5.4.3, bermanfaat pula dalam menentukan ada tidaknya batas perpanjangan kurva yang bersangkutan. Mengingat kehadiran batas-batas bagi perpanjangan suatu kurva dengan sendirinya akan membatasi kenaikan dan penurunan variabel x serta y, kehadiran batas-batas tersebut penting bagi penyelidikan mengenai asimtot. Kurva yang terbatas perpanjangannya hanya sampai nilai-nilai x atau y tertentu, dengan perkataan lain x atau y tidak mungkin terus menerus diperbesar atau diperkecil sampai tak terhingga, boleh jadi dengan sendirinya tidak mempunyai suatu asimtot vertikal atau asimtot horizontal. (Dari sini kita dapat melihat "sumbangan" konsep perpanjangan kurva bagi penyelidikan mengenai asimtot).

Contoh :

1) Selidiki apakah kurva dari persamaan $x - 3y + xy - 2 = 0$ mempunyai asimtot vertikal dan/atau asimtot horizontal.



Gambar 5—10

Penyelesaian untuk x :

$$x = \frac{3y + 2}{1 + y}$$

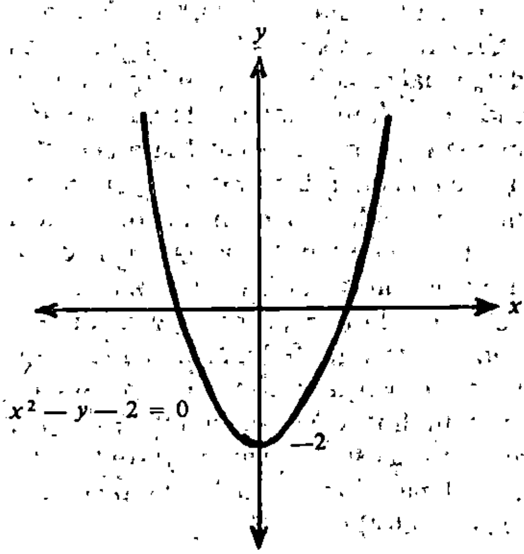
Jika $y \to +\infty$, maka $x \to 3$ dan $x < 3$.
Jika $y \to -\infty$, maka $x \to 3$ dan $x > 3$.
Berarti $x = 3$ merupakan asimtot.

Penyelesaian untuk y :

$$y = \frac{x - 2}{3 - x}$$

Jika $x \to +\infty$, maka $y \to -1$ dan $y < -1$
Jika $x \to -\infty$, maka $y \to -1$ dan $y > -1$
Berarti $y = -1$ merupakan asimtot.

2) Selidiki apakah kurva dari persamaan $x^2 - y - 2 = 0$ mempunyai asimtot vertikal dan/atau asimtot horizontal.



Gambar 5—11

Penyelesaian untuk x :

$x = \pm\sqrt{y + 2}$
Jika $y \to +\infty$, maka $x \to \pm\infty$
Jika $y \to -\infty$, maka x = bilangan khayal.
Berarti tidak ada asimtot vertikal.

Penyelesaian untuk y :
$y = x^2 - 2$

Jika $x \to +\infty$, maka $y \to +\infty$
Jika $x \to -\infty$, maka $y \to +\infty$
Juga tidak ada asimtot horizontal.

5.4.5 Faktorisasi

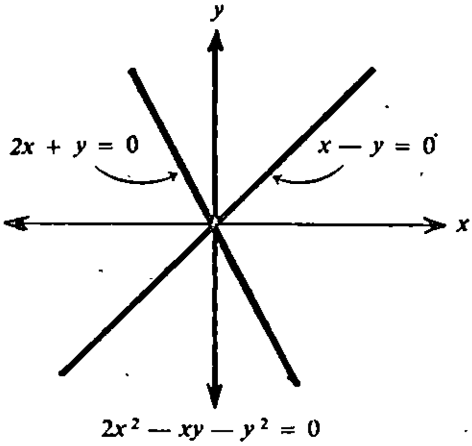
Faktorisasi fungsi maksudnya ialah menguraikan ruas utama fungsi tersebut menjadi bentuk perkalian ruas-ruas utama dari dua fungsi yang lebih kecil. Sebagai contoh, faktorisasi sebuah fungsi yang memiliki persamaan

$f(x, y) = 0$ berarti membentuk sedemikian rupa sehingga diperoleh $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y)$. [Catatan : $f(x, y)$ disebut ruas utama dari $f(x, y) = 0$].

Dalam menghadapi persamaan $f(x, y) = 0$ seringkali, karena kompleksnya jalinan antara x dan y, kita mengalami kesukaran untuk menggambarkan kurvanya. Kesukaran demikian bisa diatasi dengan jalan memfaktorkan (menguraikan) fungsi tersebut, jika hal ini memungkinkan (tidak semua fungsi dapat difaktorkan). Gambar yang dihasilkan akan terdiri atas gambar dari fungsi-fungsi yang lebih kecil. Jadi, jika $f(x, y) = 0$ dapat difaktorkan menjadi $g(x, y).h(x, y) = 0$, maka gambar dari $f(x, y) = 0$ akan terdiri atas gambar-gambar dari $g(x, y) = 0$ dan $h(x, y) = 0$. Penyelidikan mengenai faktorisasi adalah penting, mengingat sebuah persamaan-kompleks yang dapat difaktorkan sulit digambarkan dengan tepat apabila tidak difaktorkan. (Persamaan-kompleks di sini maksudnya ialah persamaan yang mengandung suku berbentuk hasilkali antara variabel bebas dan variabel terikat, misalnya $x^2 - 5y^2 + 3xy = 0$).

Contoh :

1) Gambarkan kurva dari persamaan $2x^2 - xy - y^2 = 0$



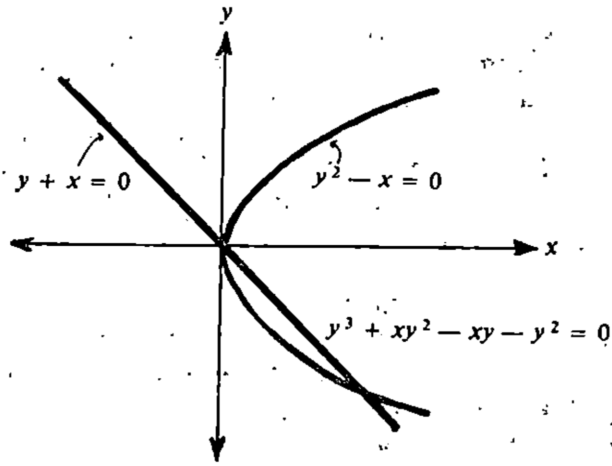
Gambar 5—12

Faktorisasi persamaan di atas menghasilkan :

$$(x - y)(2x + y) = 0,$$

sehingga gambar dari $2x^2 - xy - y^2 = 0$ terdiri atas garis-garis lurus $x - y = 0$ dan $2x + y = 0$

2) Gambarkan kurva dari persamaan $y^3 + xy^2 - xy - y^2 = 0$



Gambar 5—13

Faktorisasi :

$$y^3 + xy^2 - xy - y^2 = 0$$
$$y^2 (y + x) - x(y + x) = 0$$
$$(y^2 - x)(y + x) = 0$$

Latihan Fungsi

1. Tentukan penggal —x dan penggal —y dari persamaan-persamaan :
   (a) $5x - 10y - 20 = 0$ (c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$
   (b) $x^2 - 6x + y + 2 = 0$ (d) $x^3 - 4x^2 - 3x - y + 18 = 0$

2. Selidiki kesimetrian kurva dari persamaan-persamaan berikut terhadap sumbu —x, sumbu —y dan titik pangkal.
   (a) $6x^2 + 5x - y = 0$ (c) $x^4 + 5y^2 - 3 = 0$
   (b) $x^3 + 8x^2y + 3y = 0$ (d) $x^3 - y^2 = 0$

3. Untuk persamaan-persamaan di bawah ini, selidikilah apakah terdapat batas perpanjangan bagi kurva-kurvanya :
   (a) $x^2 + y^2 = 100$ (c) $2x - 5 = y^2$
   (b) $0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 = 147{,}92$ (d) $x^2 + y^4 - 6 = 0$

4. Tentukan apakah kurva yang dicerminkan oleh persamaan-persamaan berikut mempunyai asimtot vertikal dan/atau asimtot horizontal :
   (a) $4x^2 + 6y^2 + 12 = 0$ (c) $x - y - 2xy = 5$
   (b) $x^2 + 4y = x^2y$ (d) $x^2y^2 + 3x^2 + 6y^2 = 0$

5. Selidiki apakah persamaan-persamaan berikut dapat difaktorkan :
   (a) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ (c) $x - y = 2xy + 5$
   (b) $x^2y - x^2 - 4y = 0$ (d) $x^2y - xy^2 = x - y$

6. Untuk persamaan $x^3 - y^2 = 9$,
   (a) tentukan penggal pada masing-masing sumbu
   (b) selidiki kesimetrian kurvanya
   (c) selidiki batas perpanjangan kurvanya.

7. Untuk persamaan $xy - x - y = 2$,
   (a) tentukan penggal pada masing-masing sumbu
   (b) selidiki kesimetrian kurvanya
   (c) selidiki batas perpanjangan kurvanya.
   (d) tentukan asimtot vertikal dan/atau asimtot horizontal
   (e) jelaskan apakah persamaan tersebut dapat difaktorkan.

8. Perintah serupa seperti Soal 7 di atas untuk $x^2 - 4x + y = 12$.

9. Perintah seperti Soal 7 untuk $y = (x + 2)(x - 3)^2$, dan kemudian gambarkan kurvanya !

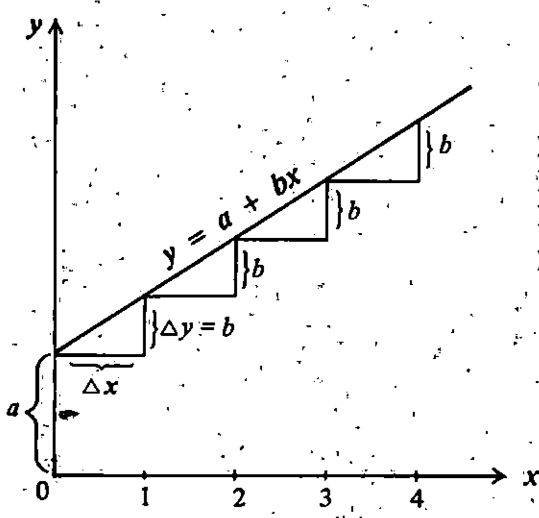
10. Tentukan apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini benar atau salah, dan betulkan jika salah :
    (a) Persamaan $x^2 y = 9$ tidak mempunyai penggal $-x$ dan penggal $-y$.
    (b) Kurva dari persamaan $x^3 - 4y = 0$ simetrik terhadap titik pangkal dan perpanjangannya tak terbatas.
    (c) Kurva $4xy^2 - y^2 + 1 = 0$ memiliki asimtot horizontal pada $y = \frac{1}{4}$.
    (d) Kurva $x^4 - 9x^2 + y^2 = 0$ simetrik terhadap titik pangkal dan tidak mempunyai asimtot vertikal maupun horizontal.
    (e) Kurva $x^2(x^2 - 1) - y = 0$ simetrik terhadap titik pangkal.
    (f) Kurva $x^3 - 4y = 0$ simetrik terhadap sumbu $-y$.

BAB 6
HUBUNGAN LINEAR

Hubungan sebab-akibat antara berbagai variabel ekonomi — misalnya antara permintaan dan harga, antara investasi dan tingkat bunga — dapat dengan mudah dinyatakan serta diterangkan dalam bentuk fungsi. Di antara berbagai macam hubungan fungsional yang ada, hubungan linear merupakan bentuk yang paling dasar dan paling sering digunakan dalam analisis ekonomi. Bab ini menguraikan segala hal yang berkenaan dengan fungsi linear atau persamaan linear, serta model-model hubungan ekonomi yang mendasarkan diri pada bentuk hubungan linear.

6.1 PENGGAL DAN LERENG GARIS LURUS

Fungsi linear atau fungsi berderajat satu ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu. Sesuai dengan namanya, setiap persamaan linear apabila digambarkan akan menghasilkan sebuah garis, tegasnya garis lurus. Bentuk umum persamaan linear adalah $y = a + bx$; di mana a adalah penggal garisnya pada sumbu-vertikal —y, sedangkan b adalah koefisien arah atau lereng garis yang bersangkutan. Penggal a mencerminkan nilai y pada kedudukan $x = 0$. Adapun lereng b mencerminkan besarnya tambahan nilai y untuk setiap tambahan satu unit x, juga mencerminkan tangen dari sudut yang dibentuk oleh garis —y dan sumbu —x. Gambar 6—1 di bawah akan memperjelas uraian ini. Satu hal yang penting untuk dicatat adalah bahwa lereng dari suatu fungsi linear selalu konstan, untuk setiap x.



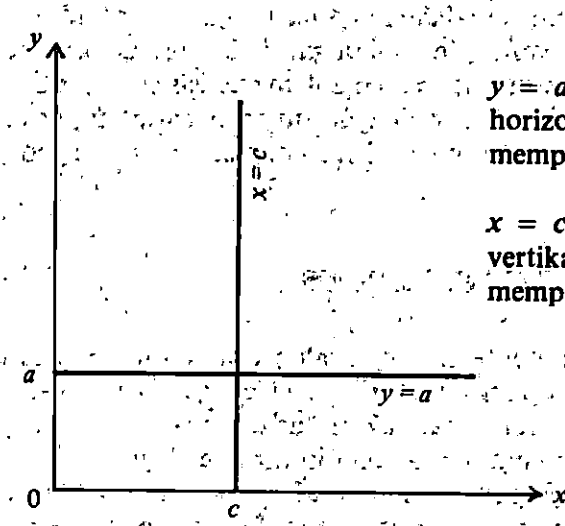
Gambar 6—1

a : penggal garis $y = a + bx$, yakni nilai y pada $x = 0$
b : lereng garis, yakni $\Delta y/\Delta x$

Pada $x = 0$, $\Delta y/\Delta x = b$
Pada $x = 1$, $\Delta y/\Delta x = b$
Pada $x = 2$, $\Delta y/\Delta x = b$

Lereng fungsi linear selalu konstan

Dalam kasus-kasus tertentu, garis dari sebuah persamaan linear dapat berupa garis horizontal sejajar sumbu —x atau garis vertikal sejajar sumbu —y. Hal ini terjadi apabila lereng garisnya sama dengan nol, sehingga ruas kanan persamaan hanya tinggal sebuah konstanta yang melambangkan penggal garis tersebut.



Gambar 6—2

$y = a$ berupa garis lurus sejajar sumbu horizontal x, besar kecilnya nilai x tidak mempengaruhi nilai y.

$x = c$ berupa garis lurus sejajar sumbu vertikal y, besar kecilnya nilai y tidak mempengaruhi nilai x.

6.2 PEMBENTUKAN PERSAMAAN LINEAR

Sebuah persamaan linear dapat dibentuk melalui beberapa macam cara, tergantung pada data yang tersedia. Pada prinsipnya sebuah persamaan linear bisa dibentuk berdasarkan dua unsur. Unsur tersebut dapat berupa penggal garisnya, lereng garisnya, atau koordinat titik-titik yang memenuhi persamaannya. Berikut ini dicontohkan empat macam cara yang dapat ditempuh untuk membentuk sebuah persamaan linear, masing-masing berdasarkan ketersediaan data yang diketahui. Keempat cara yang dimaksud adalah :

1. cara dwi-koordinat
2. cara koordinat-lereng
3. cara penggal-lereng
4. cara dwi-penggal

6.2.1 Cara Dwi-Koordinat

Dari dua buah titik dapat dibentuk sebuah persamaan linear yang memenuhi kedua titik tersebut. Apabila diketahui dua buah titik A dan B dengan koordinat masing-masing (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), maka rumus persamaan linearnya adalah :

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Andaikan diketahui bahwa titik A (2, 3) dan titik B (6, 5), maka persamaan linearnya adalah :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{x - 2}{6 - 2}$$

$$\frac{y - 3}{2} = \frac{x - 2}{4}$$

$4y - 12 = 2x - 4, \quad 4y = 2x + 8, \quad y = 2 + 0{,}5\,x.$

6.2.2 Cara Koordinat-Lereng

Dari sebuah titik dan suatu lereng dapat dibentuk sebuah persamaan linear yang memenuhi titik dan lereng tersebut. Apabila diketahui sebuah titik A dengan koordinat (x_1, y_1) dan lereng garisnya adalah b, maka rumus persamaan linearnya adalah :

$$\boxed{y - y_1 = b\,(x - x_1)}$$

b = lereng garis $\simeq m$

Andaikan diketahui bahwa titik A (2, 3) dan lereng garisnya adalah 0,5, maka persamaan linear yang memenuhi kedua data ini adalah :

$$y - y_1 = b(x - x_1)$$
$$y - 3 = 0{,}5(x - 2)$$
$$y - 3 = 0{,}5x - 1, \qquad y = 2 + 0{,}5x$$

6.2.3 Cara Penggal-Lereng

Sebuah persamaan linear dapat pula dibentuk apabila diketahui penggalnya pada salah satu sumbu dan lereng garis yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam hal ini rumus persamaan linearnya adalah :

$$\boxed{y = a + bx} \qquad (a = \text{penggal}, \quad b = \text{lereng})$$

Andaikan penggal dan lereng garis $y = f(x)$ masing-masing adalah 2 dan 0,5, maka persamaan linearnya ialah :

$$y = 2 + 0{,}5x.$$

6.2.4 Cara Dwi-Penggal

Terakhir, sebuah persamaan linear dapat pula dibentuk apabila diketahui penggal garis tersebut pada masing-masing sumbu, yakni penggal pada sumbu vertikal (ketika $x = 0$) dan penggal pada sumbu horizontal (ketika $y = 0$). Apabila a dan c masing-masing adalah penggal pada sumbu-sumbu vertikal dan horizontal dari sebuah garis lurus, maka persamaan garisnya adalah :

$$\boxed{y = a - \frac{a}{c}x}$$

a = penggal vertikal
c = penggal horizontal

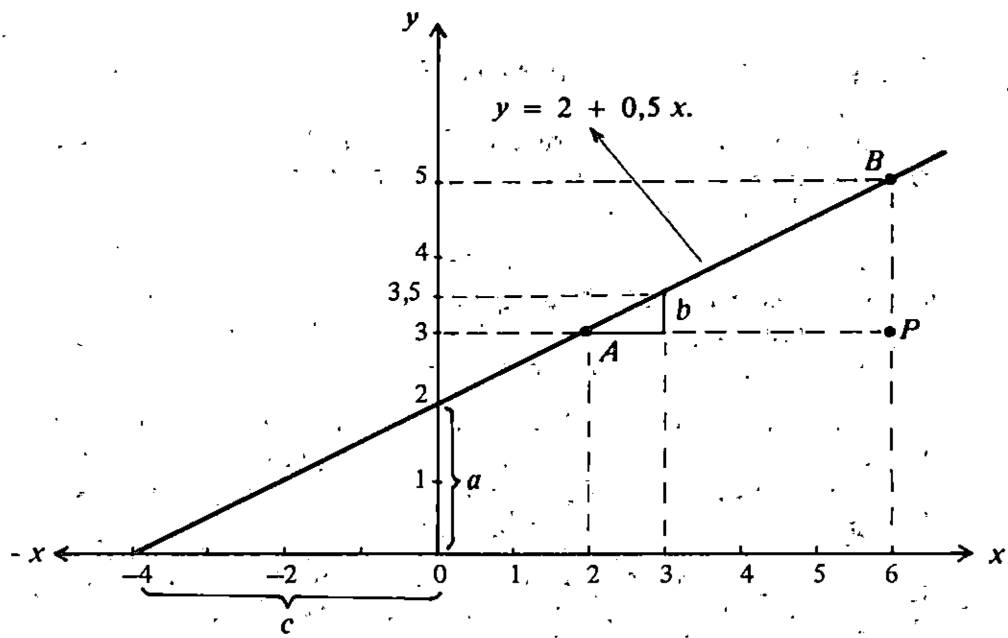
Andaikan penggal sebuah garis pada sumbu vertikal dan sumbu horizontal masing-masing 2 dan –4, maka persamaan linear yang memenuhinya ialah :

$$y = a - \frac{a}{c}x$$

$$y = 2 - \frac{2}{(-4)}x$$

$$y = 2 + 0{,}5x.$$

Garis lurus dari persamaan linear yang dibentuk berdasarkan keempat cara di atas dapat dilihat pada Gambar 6—3 di bawah ini.



Gambar 6—3

Lereng sebuah garis lurus tak lain adalah hasilbagi selisih antara dua ordinat ($y_2 - y_1$) terhadap selisih antara dua absis ($x_1 - x_1$). Menurut cara dwikoordinat, rumus persamaan linear ialah :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

atau bila diuraikan

$$y - y_1 = y_2 - y_1 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Sedangkan menurut cara koordinat-lereng

$$y - y_1 = b (x - x_1)$$

Berarti $\boxed{b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

6.3 HUBUNGAN DUA GARIS LURUS

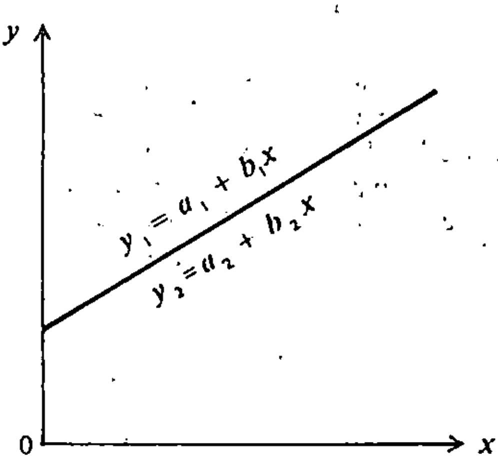
Dalam sistem sepasang sumbu-silang, dua buah garis lurus mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yaitu berimpit, sejajar, berpotongan dan tegak lurus.

Dua buah garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari (proporsional terhadap) persamaan garis yang lain. Dengan demikian, garis $y_1 = a_1 + b_1 x$ akan berimpit dengan garis $y_2 = a_2 + b_2 x$ jika $y_1 = ny_2$, $a_1 = na_2$ dan $b_1 = nb_2$

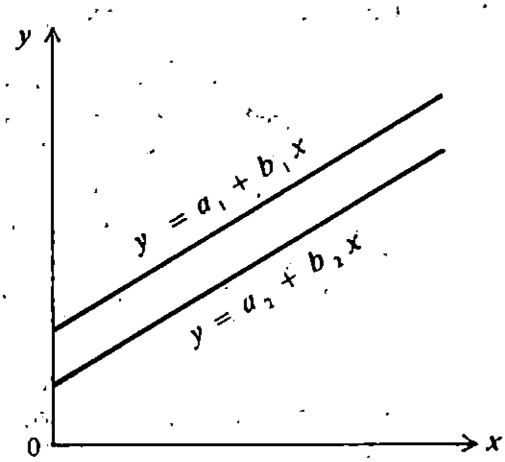
Dua buah garis lurus akan sejajar apabila lereng garis yang satu sama dengan lereng garis yang lain. Dengan demikian, garis $y = a_1 + b_1 x$ akan sejajar dengan garis $y = a_2 + b_2 x$ jika $b_1 = b_2$. (Tentu saja a_1 harus tidak sama dengan a_2. Jika $a_1 = a_2$, kedua garis bukan saja sejajar tetapi juga berimpit).

Dua buah garis lurus akan berpotongan apabila lereng garis yang satu tidak sama dengan lereng garis yang lain. Dengan demikian, garis $y = a_1 + b_1 x$ akan berpotongan dengan garis $y = a_2 + b_2 x$ jika $b_1 \neq b_2$.

Akhirnya, dua buah garis lurus akan saling tegak lurus apabila lereng garis yang satu merupakan kebalikan dari lereng garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Dengan demikian, garis $y = a_1 + b_1 x$ akan tegak lurus dengan garis $y = a_2 + b_2 x$ jika $b_1 = -1/b_2$ atau $b_1 \cdot b_2 = -1$.



(a)



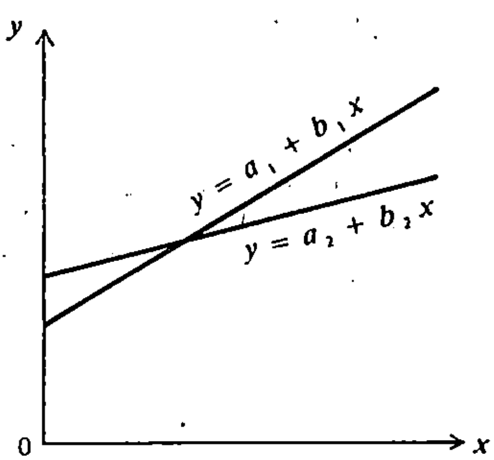
(b)

berimpit :

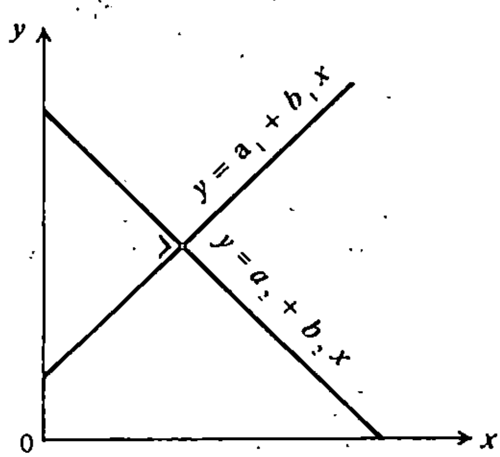
$$y_1 = ny_2$$
$$a_1 = na_2$$
$$b_1 = nb_2$$

sejajar :

$$a_1 \neq a_2$$
$$b_1 = b_2$$



(c)



(d)

berpotongan :

$b_1 \neq b_2$

Gambar 6—4

tegak lurus :

$b_1 = -1/b_2$

6.4 PENCARIAN AKAR-AKAR PERSAMAAN LINEAR

Mencari akar-akar persamaan maksudnya ialah menghitung besarnya nilai variabel-variabel di dalam persamaan yang bersangkutan. Dengan perkataan lain, menghitung harga dari bilangan tak-diketahui (bilangan anu) dalam persamaan tersebut. Pada prinsipnya, jumlah bilangan anu yang dapat diselesaikan berbanding lurus dengan jumlah persamaannya. Sebuah bilangan anu dapat dicari harganya melalui cukup sebuah persamaan, dua bilangan anu hanya dapat dicari harganya melalui paling sedikit dua persamaan, tiga bilangan anu hanya dapat diselesaikan melalui paling sedikit tiga persamaan, dan seterusnya.

Pencarian besarnya harga bilangan-bilangan anu dari beberapa persamaan linear, dengan kata lain penyelesaian persamaan-persamaan linear secara serempak (*simultaneously*), dapat dilakukan melalui tiga macam cara :

1. cara substitusi
2. cara eliminasi
3. cara determinan

6.4.1 Cara Substitusi

Dua persamaan dengan dua bilangan anu dapat diselesaikan dengan cara menyelesaikan terlebih dahulu sebuah persamaan untuk salah satu bilangan anu, kemudian mensubstitusikannya ke dalam persamaan yang lain.

Contoh : Carilah nilai variabel-variabel x dan y dari dua persamaan berikut :
$2x + 3y = 21$ dan $x + 4y = 23$.

Penyelesaian :

Selesaikan lebih dahulu salah satu persamaan untuk bilangan anu tertentu. Dalam hal ini, mengingat pertimbangan praktis, kita selesaikan lebih dahulu persamaan kedua untuk variabel x, diperoleh $x = 23 - 4y$. Kemudian substitusikan hasil x (yang masih mengandung y) ini ke dalam persamaan pertama, sehingga :

$$2x + 3y = 21$$
$$2(23 - 4y) + 3y = 21$$
$$46 - 8y + 3y = 21$$
$$46 - 5y = 21, \quad 25 = 5y, \quad y = 5$$

Untuk mendapatkan nilai x, masukkan hasil $y = 5$ ini ke dalam salah satu persamaan semula.

$$2x + 3(5) = 21 \qquad \text{atau} \qquad x + 4(5) = 23$$
$$2x + 15 = 21 \qquad\qquad x + 20 = 23$$
$$2x = 6, \quad x = 3 \qquad\qquad x = 3$$

Jadi, akar-akar persamaan tersebut adalah $x = 3$ dan $y = 5$.

6.4.2 Cara Eliminasi

Dua persamaan dengan dua bilangan anu dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan untuk sementara (mengeliminasi) salah satu dari bilangan anu yang ada, sehingga dapat dihitung nilai dari bilangan anu yang lain.

Contoh : Carilah nilai variabel-variabel x dan y dari dua persamaan berikut :
$2x + 3y = 21$ dan $x + 4y = 23$

Penyelesaian :

Misalkan bilangan anu yang hendak dieliminasikan adalah x, maka kalikan persamaan pertama dengan 1 dan persamaan kedua dengan 2, sehingga :

$$\begin{array}{l|l|l} 2x + 3y = 21 & \times 1 & 2x + 3y = 21 \\ x + 4y = 23 & \times 2 & 2x + 8y = 46 \end{array}$$

Agar x hilang (habis) berarti kedua persamaan baru di atas harus saling dikurangkan.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 21 \\ \underline{2x + 8y = 46} \; (-) \\ -5y = -25, \quad y = 5 \end{array}$$

Dengan memasukkan hasil $y = 5$ ini ke dalam salah satu persamaan semula, seperti halnya dalam cara substitusi di atas, diperoleh $x = 3$. Jadi, akar-akar persamaannya adalah $x = 3$ dan $y = 5$.

6.4.3 Cara Determinan

Baik cara substitusi maupun cara eliminasi keduanya dapat digunakan untuk menyelesaikan n persamaan dengan n bilangan anu ($n \geqslant 2$), jadi tidak terbatas hanya untuk menyelesaikan kasus dua persamaan dengan dua bilangan anu saja. Akan tetapi jika jumlah persamaan dan jumlah bilangan anu yang hendak diselesaikan cukup banyak, proses penyelesaiannya akan menjadi bertele-tele sebab kita harus melakukan beberapa kali penyederhanaan. Akibatnya pekerjaan bukan saja menjadi kompleks dan pelik, tetapi juga tidak efisien. Untuk mengatasi hal semacam ini, terdapat suatu cara penyelesaian yang disebut cara determinan.

Seperti halnya cara substitusi dan cara eliminasi, cara determinan pun dapat digunakan untuk menyelesaikan n persamaan dengan n bilangan anu

($n \geq 2$). Kelebihannya ialah cara determinan lebih efisien dalam menyelesaikan kasus-kasus di mana n cukup besar.

Determinan secara umum dilambangkan dengan notasi

$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ di masa unsur-unsur a, b, d dan e mencerminkan

bilangan-bilangan tertentu. Sebuah determinan terdiri atas beberapa baris dan kolom. Sebuah determinan bisa saja mempunyai sejumlah besar baris dan kolom, akan tetapi banyaknya baris harus sama dengan banyaknya kolom. Banyaknya baris dan kolom suatu determinan menunjukkan dimensi dari determinan tersebut, sekaligus juga merupakan derajat determinannya. Dengan demikian, determinan berderajat-n maksudnya ialah determinan yang berdimensi-n, yakni determinan yang terdiri atas n baris dan n kolom.

Prinsip pengerjaan determinan ialah dengan mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal, dari kiri-atas menurun ke kanan-bawah dan dari kiri-bawah menaik ke kanan-atas; kemudian hasil perkalian menurun dikurangi dengan hasil perkalian menaik.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db \qquad \begin{vmatrix} p & -q \\ s & t \end{vmatrix} = pt - s(-q)$$

Untuk determinan berderajat - 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + chd - gec - dbi - afh$$

Contoh :

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7) - (5)(-4) = 14 + 20 = 34$$

$$\begin{aligned} 2) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} &= (3)(-2)(7) + (6)(5)(3) + (4)(2)(1) - \\ &\quad (3)(-2)(4) - (1)(6)(7) - (3)(5)(2) \\ &= -42 + 90 + 8 + 24 - 42 - 30 = 8. \end{aligned}$$

Pencarian akar-akar persamaan linear dengan cara determinan dapat dilakukan dengan teknik-teknik sebagaimana dicontohkan berikut.

- Andaikan kita menghadapi dua persamaan dengan dua bilangan anu :

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Penyelesaian untuk x dan y dapat dilakukan sebagai berikut :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - fb}{ae - db}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - dc}{ae - db}$$

[Perhatikan pergantian unsur pada masing-masing determinan !]

- Jika kita memiliki tiga persamaan dengan tiga bilangan anu :

$$ax + by + cz = k$$
$$dx + ey + fz = l$$
$$gx + hy + iz = m$$

maka :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + chd - gec - dbi - afh$$

$$D_x = \begin{vmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & i \end{vmatrix} = kei + bfm + chl - mec - lbi - kfh$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & i \end{vmatrix} = ali + kfg + cmd - glc - dki - afm$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{vmatrix} = aem + blg + khd - gek - dbm - alh$$

Selanjutnya : $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$ dan $z = \dfrac{D_z}{D}$

[Perhatikan pergantian unsur pada masing-masing determinan !]

Notasi D_x, D_y dan D_z masing-masing melambangkan determinan untuk variabel-variabel x, y dan z. Sedangkan notasi D disebut koefisien determinan. Dalam menghitung nilai-nilai dari variabel suatu persamaan, koefisien determinan berfungsi sebagai suku pembagi terhadap determinan variabel.

Contoh :

1) Carilah nilai variabel-variabel x dan y dari dua persamaan berikut :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 21 \\ x + 4y &= 23. \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad D_x = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 23 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} = 25$$

8 -3 84

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{5} = 3, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{25}{5} = 5.$$

2) Carilah nilai-nilai x, y dan z dari persamaan-persamaan :

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 14 \\ y - 3z &= -7. \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1)(5)(-3) + (2)(2)(0) + (-1)(1)(2) - (0)(5)(-1) - (2)(2)(-3) - (1)(2)(1) = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 14 & 5 & 2 \\ -7 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (0)(5)(-3) + (2)(2)(-7) + (-1)(1)(14) - (-7(5)(-1) - (14)(2)(-3) - (0)(2)(1) = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 14 & 2 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (1)(14)(-3) + (0)(2)(0) + (-1)(-7)(2) - (0)(14)(-1) - (2)(0)(-3) - (1)(2)(-7) = -14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = (1)(5)(-7) + (2)(14)(0) + (0)(1)(2) - (0)(5)(0) - (2)(2)(-7) - (1)(14)(1) = -21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{-7} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$$

Latihan Fungsi Linear

1. Bentuklah persamaan linear yang garisnya melalui pasangan titik-titik berikut :
   (a) (-1, 4) dan (1, 0) (c) (0, 0) dan (1, 5)
   (b) (-1, -2) dan (-5, -2) (d) (1, 4) dan (2, 3)

2. Bentuklah persamaan linear yang garisnya melalui titik (-1, 3) dan mempunyai koefisien arah atau lereng sebesar :
   (a) -1 (c) 5
   (b) 2 (d) 0

3. Andaikan $y = 8 - 2x$. Hitunglah :
   (a) $f(0)$ (c) $f(4)$
   (b) $f(2)$ (d) $f(5)$

   2 bx

4. Berapa lereng dan penggal garis (pada sumbu—y) dari persamaan-persamaan berikut :
   (a) $y = -x$? imajh (c) $y = -7 + 3x$?
   (b) $y = -3 - 4x$? (d) $y = 6 + 4x$?
   $y = -3 - 4x$ palag smbu −1

5. Tentukan titik potong dari pasangan garis-garis berikut :
   (a) $y = -2 + 4x$ dan $y = 2 + 2x$
   (b) $y = -2 + 4x$ dan $y = 6$
   (c) $y = 6$ dan $y = 10 - 2x$
   (d) $y = 2 + 2x$ dan $y = 10 - 2x$

   dvd

6. Selesaikan determinan-determinan berikut :

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 10 & 7 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

7. Hitunglah nilai-nilai x dan y apabila $8x = 4 + 4y$ dan $2x + 3y - 21 = 0$.

8. Kerjakan Soal 7 di atas dengan cara determinan.

9. Carilah nilai-nilai a, b dan c dengan cara determinan jika :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 5a - 9b - 2c &= 8 \\ 3a + 5b - 3c &= 45. \end{aligned}$$

10. Tentukan p, q, r, s dan t jika : $p + q - 3r - 2s + 2t = -4$,
    $2p + 2r + s - 2t = 2$, $4p - 2q + 4r - 3s = 0$,
    $3p + 3q + 3r - s - t = 9$ dan $5p - 2q + 4r - s + t = 14$.

6.5 PENERAPAN EKONOMI

Sebagaimana telah disinggung di awal bab ini, fungsi linear sangat lazim diterapkan dalam ilmu ekonomi, baik dalam pembahasan ekonomi mikro maupun ekonomi makro. Dua variabel ekonomi, atau lebih, yang saling berhubungan acapkali diterjemahkan ke dalam bentuk sebuah persamaan linear. Seksi-seksi berikut ini akan menguraikan penerapan fungsi linear dalam ekonomi. Secara bertahap akan dibahas :

- Penerapan Fungsi Linear dalam Teori Ekonomi Mikro
  1. Fungsi permintaan, fungsi penawaran dan keseimbangan pasar
  2. Pengaruh pajak-spesifik terhadap keseimbangan pasar
  3. Pengaruh pajak-proporsional terhadap keseimbangan pasar
  4. Pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar
  5. Keseimbangan pasar kasus dua macam barang
  6. Fungsi biaya dan fungsi penerimaan
  7. Keuntungan, kerugian dan pulang-pokok
  8. Fungsi anggaran
- Penerapan Fungsi Linear dalam Teori Ekonomi Makro
  9. Fungsi konsumsi, fungsi tabungan dan angka-pengganda
  10. Pendapatan disposabel
  11. Fungsi pajak
  12. Fungsi investasi
  13. Fungsi impor
  14. Pendapatan nasional
  15. Analisis IS-LM.

6.5.1 Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran dan Keseimbangan Pasar

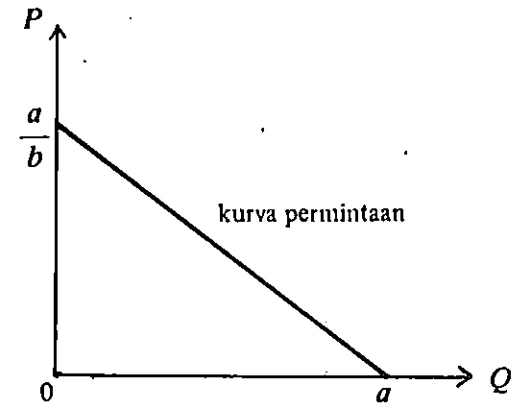
Permintaan dan penawaran. Fungsi permintaan menghubungkan antara variabel harga dan variabel jumlah (barang/jasa) yang diminta. Sedangkan fungsi penawaran menghubungkan antara variabel harga dan variabel jumlah (barang/jasa) yang ditawarkan.

Bentuk umum fungsi permintaan

$$\boxed{Q = a - bP}$$

atau

$$\boxed{P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q}$$



Gambar 6—5

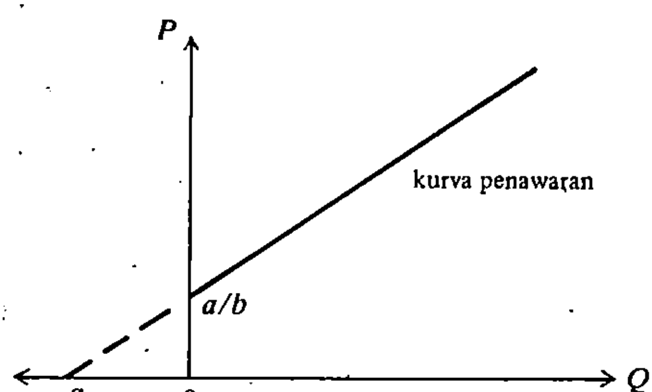
Dalam bentuk persamaan di atas terlihat bahwa variabel P (*price*, harga) dan variabel Q (*quantity*, jumlah) mempunyai tanda yang berlawanan. Ini mencerminkan hukum permintaan, bahwa apabila harga naik jumlah yang diminta akan berkurang dan apabila harga turun jumlah yang diminta akan bertambah. Gerakan harga berlawanan arah dengan gerakan jumlah, oleh karena itu kurva permintaan berlereng negatif.

Bentuk umum fungsi penawaran

$$\boxed{Q = -a + bP}$$

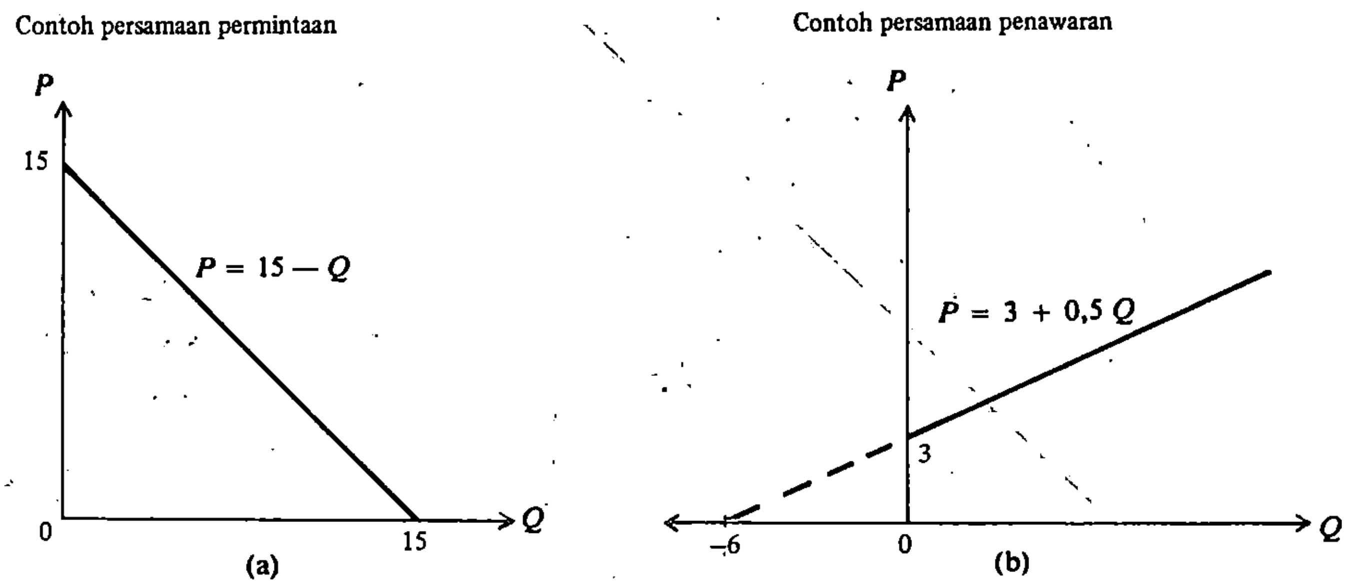
atau

$$\boxed{P = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}Q}$$



Gambar 6 – 6

Dalam bentuk persamaan di atas terlihat bahwa variabel P (harga) dan variabel Q (jumlah) mempunyai tanda yang sama, yaitu sama-sama positif. Ini mencerminkan hukum penawaran, bahwa apabila harga naik jumlah yang ditawarkan akan bertambah dan apabila harga turun jumlah yang ditawarkan akan berkurang. Gerakan harga searah dengan gerakan jumlah, oleh karena itu kurva penawaran berlereng positif.


Contoh persamaan permintaan
P
15
$P = 15 - Q$
0
15
Q
(a)
Contoh persamaan penawaran
P
$P = 3 + 0,5\,Q$
3
−6
0
Q
(b)

Gambar 6—7

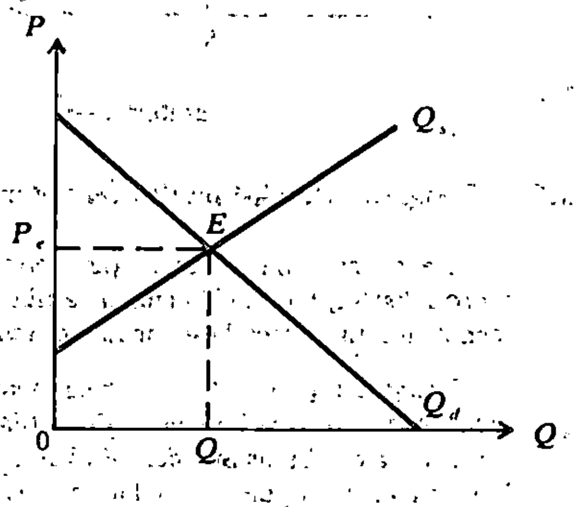
Dalam menggambarkan kurva permintaan dan kurva penawaran sebetulnya dibenarkan meletakkan variabel harga (P) pada sumbu horizontal dan variabel jumlah (Q) pada sumbu vertikal. Jadi tidak harus variabel harga ditempatkan pada sumbu vertikal dan variabel jumlah pada sumbuh horizontal, sebagaimana dicontohkan di atas. Akan tetapi terdapat semacam tradisi menempatkan P pada sumbu vertikal dan Q pada sumbu horizontal, dan uraian-uraian di dalam buku ini mengikuti tradisi tersebut.

Keseimbangan pasar. Pasar suatu macam barang dikatakan berada dalam keseimbangan (*equilibrium*) apabila jumlah barang yang diminta di pasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Secara matematik dan grafik hal ini ditunjukkan oleh kesamaan $Q_d = Q_s$, yakni pada perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran. Pada posisi keseimbangan pasar ini tercipta harga keseimbangan (*equilibrium price*) dan jumlah keseimbangan (*equilibrium quantity*).

Keseimbangan Pasar

$$\boxed{Q_d = Q_s}$$

Q_d : jumlah permintaan
Q_s : jumlah penawaran
E : titik keseimbangan
P_e : harga keseimbangan
Q_e : jumlah keseimbangan



Gambar 6—8

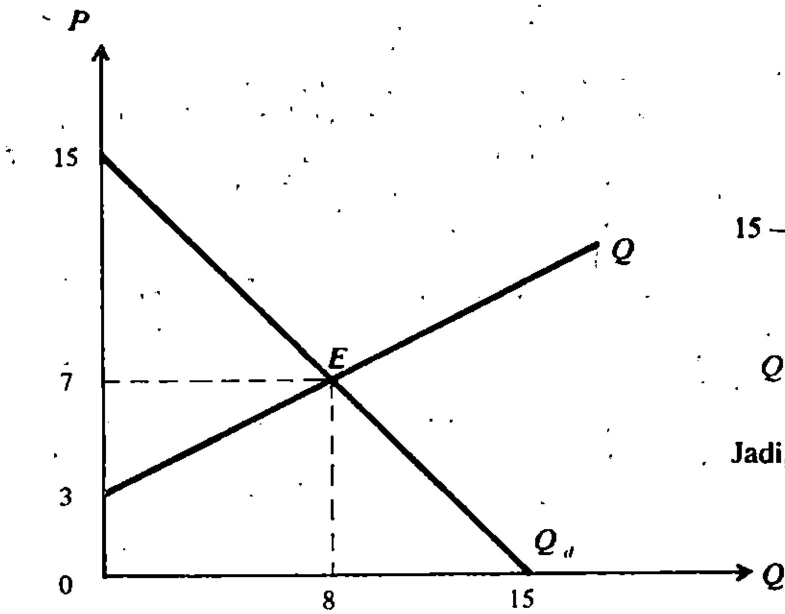
Kasus 6*)

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 - Q$, sedangkan penawarannya $P = 3 + 0{,}5\ Q$. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar ?

Permintaan : $P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$
Penawaran : $P = 3 + 0{,}5\ Q \rightarrow Q = -6 + 2P$
} Keseimbangan pasar : $Q_d = Q_s$

---

*)Kasus-kasus penerapan sebelumnya (1 sampai dengan 5) terdapat di dalam Bab 4, khususnya Sub-bab 4.3.



$$15 - P = -6 + 2P$$
$$21 = 3P$$
$$P = 7$$

$$Q = 15 - P$$
$$= 15 - 7 = 8$$

Jadi, $P_e = 7$
$Q_e = 8$

Gambar 6—9

6.5.2 Pengaruh Pajak-Spesifik terhadap Keseimbangan Pasar

Pengenaan pajak atau pemberian subsidi atas suatu barang yang diproduksi/dijual akan mempengaruhi keseimbangan pasar barang tersebut, mempengaruhi harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan.

Pengaruh pajak. Pajak yang dikenakan atas penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut naik. Sebab setelah dikenakan pajak, produsen akan berusaha mengalihkan (sebagian) beban pajak tersebut kepada konsumen, yaitu dengan jalan menawarkan harga jual yang lebih tinggi. Akibatnya harga keseimbangan yang tercipta di pasar menjadi lebih tinggi daripada harga keseimbangan sebelum pajak, di lain pihak jumlah keseimbangannya menjadi lebih sedikit.

Pengenaan pajak sebesar t atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan kurva penawaran bergeser ke atas, dengan penggal yang lebih besar (lebih tinggi) pada sumbu harga. Jika sebelum pajak persamaan penawarannya $P = a + bQ$, maka sesudah pajak ia akan menjadi $P = a + bQ + t = (a + t) + bQ$. Dengan kurva penawaran yang lebih tinggi, ceteris paribus, titik keseimbangan pun akan bergeser menjadi lebih tinggi.

Kasus 7

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P $15 - Q$, sedangkan penawarannya $P = 3 + 0{,}5\,Q$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 3 per unit. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum pajak, dan berapa pula harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sesudah pajak ?

Sebelum pajak, $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$ (lihat penyelesaian Kasus 6 tadi). Sesudah pajak, harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih tinggi, persamaan penawarannya berubah dan kurvanya bergeser ke atas.

Penawaran sebelum pajak : $P = 3 + 0{,}5\,Q$
Penawaran sesudah pajak : $P = 3 + 0{,}5\,Q + 3$
$P = 6 + 0{,}5\,Q \rightarrow Q = -12 + 2\,P$

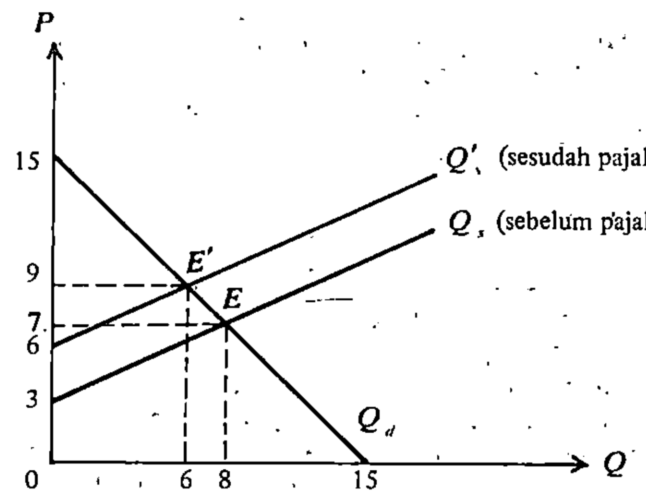
Sedangkan persamaan permintaannya tetap :

$$P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$$

Keseimbangan pasar : $Q_d = Q_s$

$$15 - P = -12 + 2\,P \rightarrow 27 = 3\,P,\ P = 9$$
$$Q = 15 - P = 15 - 9 = 6$$

Jadi, sesudah pajak : $P'_e = 9$ dan $Q'_e = 6$.



Gambar 6—10

Beban pajak yang ditanggung oleh konsumen. Karena produsen mengalihkan sebagian beban pajak tadi kepada konsumen, melalui harga jual yang lebih tinggi, pada akhirnya beban pajak tersebut ditanggung bersama oleh baik produsen maupun konsumen. Besarnya bagian dari beban pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak (P'_e) dan harga keseimbangan sebelum pajak (P_e).

$$\boxed{tk = P'_e - P_e}$$

Dalam Kasus 7 di atas, $tk = 9 - 7 = 2$. Berarti dari setiap unit barang yang dibelinya konsumen menanggung beban (membayar) pajak sebesar 2. Dengan perkataan lain, dari pajak sebesar 3 per unit barang, sebesar 2 (atau 67%) pada akhirnya menjadi tanggungan konsumen.

Beban pajak yang ditanggung oleh produsen. Besarnya bagian dari beban pajak yang ditanggung oleh produsen (tp) adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang (t) dan bagian pajak yang menjadi tanggungan konsumen (tk).

$$\boxed{tp = t - tk}$$

Dalam Kasus 7 tadi, $tp = 3 - 2 = 1$. Berarti dari setiap unit barang yang diproduksi dan dijualnya produsen menanggung beban (membayar) pajak sebesar 1. Dihitung dalam satuan persen, beban pajak yang ditanggung oleh pihak produsen ini hanya sebesar 33%, lebih sedikit daripada yang ditanggung oleh pihak konsumen. Jadi meskipun pajak tersebut dipungut oleh pemerintah melalui pihak produsen, namun sesungguhnya pihak konsumenlah yang justru lebih berat menanggung bebannya.

Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah. Besarnya jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T) dapat dihitung dengan mengalikan jumlah barang yang terjual sesudah pengenaan pajak (Q'_e) dengan besarnya pajak per unit barang (t).

$$\boxed{T = Q'_e \times t}$$

Dalam kasus ini, $T = 6 \times 3 = 18$. Penerimaan dari pajak merupakan salah satu sumber pendapatan pemerintah, bahkan merupakan sumber pendapatan utama. Dengan inilah pemerintah menjalankan roda kegiatannya sehari-hari, membangun prasarana publik seperti jalan dan jembatan, membayar cicilan hutang pada negara lain, membiayai pegawai-pegawainya, membangun proyek-proyek sarana publik seperti rumah sakit dan sekolah, juga membeli perlengkapan pertahanan. Jadi, pajak yang disetorkan oleh rakyat kepada pemerintah akhirnya kembali ke rakyat lagi, dalam bentuk lain. Jika dalam melunasi pajak anda memainkan "persetujuan rahasia" dengan petugas pajak, berarti anda berbagi "rezeki" dengan sang oknum pajak hanya untuk merasakan keuntungan jangka pendek, tidak menghiraukan masa depan negara dan bangsa (termasuk anak cucuk anda sendiri !).

Catatan tentang persamaan penawaran sesudah pajak :

Dalam contoh di depan kita memasukkan unsur pajak ke dalam persamaan penawaran yang berbentuk $P = f(Q)$; yakni jika semula $P = a + bQ$

maka sesudah pajak menjadi $P = a + bQ + t$. Apabila persamaan penawarannya berbentuk $Q = f(P)$, misalnya $Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}P$, kita pun dapat memasukkan unsur pajak tersebut secara langsung, tanpa harus mengubah dulu fungsi penawaran yang berbentuk $Q = f(P)$ menjadi bentuk $P = f(Q)$. Dalam hal ini rumusannya adalah $Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}(P - t)$. Hasilnya tidak akan berbeda, sebab :

$$Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}(P - t)$$

$$Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}P - \frac{t}{b}$$

$$bQ = -a + P - t \rightarrow P' = a + bQ + t$$

6.5.3 Pengaruh Pajak Proporsional terhadap Keseimbangan Pasar

Pajak proporsional ialah pajak yang besarnya ditetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual; bukan ditetapkan secara spesifik (misalnya 3 rupiah) per unit barang, sebagaimana yang diuraikan dalam Seksi 6.5.2 sebelumnya. Meskipun pengaruhnya serupa dengan pengaruh pajak spesifik, menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi jumlah keseimbangan, namun analisisnya sedikit berbeda.

Jika pengenaan pajak spesifik menyebabkan kurva penawaran bergeser ke atas sejajar dengan kurva penawaran sebelum pajak, dengan kata lain lereng kurvanya tetap, maka pajak proporsional menyebabkan kurva penawaran memiliki lereng yang lebih besar daripada kurva penawaran sebelum pajak.

Jika persamaan penawaran semula $P = a + bQ$ (atau $Q = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}P$) maka, dengan dikenakannya pajak proporsional sebesar $t\%$ dari harga jual, persamaan penawaran yang baru akan menjadi :

$$P = a + bQ + tP \qquad t: \text{pajak proporsional dalam } \%$$

$$P - tP = a + bQ$$

$$(1 - t)P = a + bQ$$

$$P = \frac{a}{(1 - t)} + \frac{b}{(1 - t)}Q \quad \text{atau} \quad Q = -\frac{a}{b} + \frac{(1 - t)}{b}P$$

Dari sini terlihat kurva penawaran $P = f(Q)$ sesudah pajak proporsional mempunyai penggal vertikal yang lebih tinggi [sekarang $a/(1 - t)$, semula hanya a] dan juga lereng yang lebih besar [sekarang $b/(1 - t)$, semula hanya b]. Untuk melihat pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar, ikutilah contoh berikut.

Kasus 8

Andaikan kita memiliki data yang sama seperti pada Kasus 6, yakni permintaan $P = 15 - Q$ dan penawaran $P = 3 + 0,5\ Q$. Kemudian, pemerintah mengenakan pajak sebesar 25% dari harga jual. Hitunglah harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan tanpa pajak serta dengan pajak.

Sebelum pajak, $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$ (lihat lagi penyelesaian Kasus 6). Sesudah pajak, persamaan penawarannya akan berubah, sementara persamaan permintaannya tetap $P = 15 - Q$ atau $Q = 15 - P$.

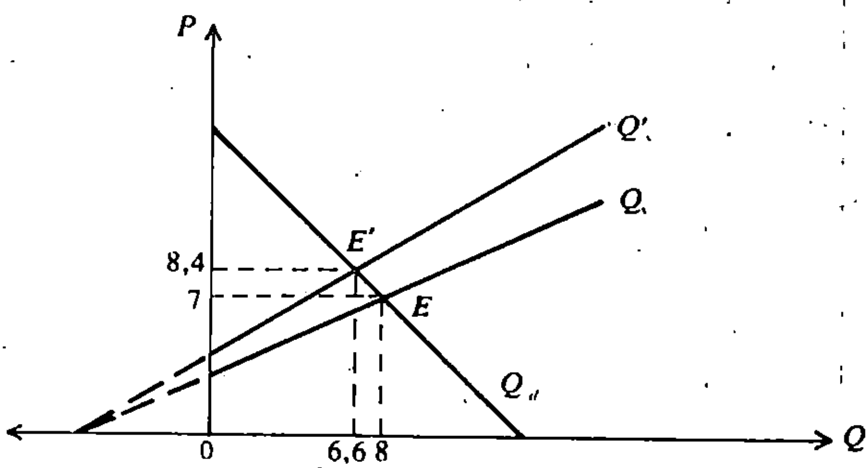
Penawaran sesudah pajak, dengan $t = 25\% = 0,25$:

$$P = 3 + 0,5\ Q + 0,25\ P$$
$$0,75\ P = 3 + 0,5\ Q$$
$$P = 4 + \frac{2}{3}\ Q \quad \text{atau} \quad Q = -6 + 1,5\ P$$

Keseimbangan pasar :

$$Q_d = Q_s$$
$$15 - P = -6 + 1,5\ P \rightarrow 21 = 2,5\ P, \quad P = 8,4$$
$$Q = 15 - P = 15 - 8,4 = 6,6$$

Jadi, sesudah pajak : $P'_e = 8,4$ dan $Q'_e = 6,6$.
Patut dicatat, dalam hal ini besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah $t \times P'_e = 0,25 \times 8,4 = 2,1$.



Gambar 6—11

Besarnya beban pajak yang ditanggung oleh konsumen untuk setiap unit barang yang dibeli adalah $tk = P'_e - P_e = 8{,}4 - 7 = 1{,}4$ (atau 67%). Sedangkan yang ditanggung oleh produsen adalah $tp = t - tk = 2{,}1 - 1{,}4 = 0{,}7$ (atau 33%). Adapun jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah dari perdagangan barang ini adalah $T = Q'_e \times t = 6{,}6 \times 2{,}1 = 13{,}86$. Dari perhitungan-perhitungan di sini kita dapat menyimpulkan, bahwa pada akhirnya pihak konsumen juga yang menanggung beban lebih berat dari pajak penjualan.

6.5.4 Pengaruh Subsidi terhadap Keseimbangan Pasar

Subsidi merupakan kebalikan atau lawan dari pajak, oleh karena itu ia sering juga disebut pajak negatif. Seiring dengan itu, pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar berbalikan dengan pengaruh pajak, sehingga kita bisa menganalisisnya seperti ketika menganalisis pengaruh pajak. Subsidi dapat bersifat spesifik dan dapat pula bersifat proporsional. Dalam buku ini hanya diuraikan subsidi yang bersifat spesifik. Telaah mengenai subsidi proporsional dapat anda coba sendiri berdasarkan analogi pajak proporsional.

Pengaruh subsidi. Subsidi yang diberikan atas produksi/penjualan sesuatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut menjadi lebih rendah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa ongkos produksinya menjadi lebih kecil sehingga ia bersedia menjual lebih murah. Akibatnya harga keseimbangan yang tercipta di pasar lebih rendah daripada harga keseimbangan sebelum atau tanpa subsidi, dan jumlah keseimbangannya menjadi lebih banyak.

Dengan subsidi spesifik sebesar s kurva penawaran bergeser sejajar ke bawah, dengan penggal yang lebih kecil (lebih rendah) pada sumbu harga. Jika sebelum subsidi persamaan penawarannya $P = a + bQ$, maka sesudah subsidi ia akan menjadi $P' = a + bQ - s = (a - s) + bQ$. Dengan kurva penawaran yang lebih rendah, ceteris paribus, titik keseimbangan pun akan bergeser menjadi lebih rendah.

Kasus 9

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 - Q$, sedangkan penawarannya $P = 3 + 0{,}5\,Q$. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi. Berapa harga keseimbangan serta jumlah keseimbangan tanpa dan dengan subsidi ?

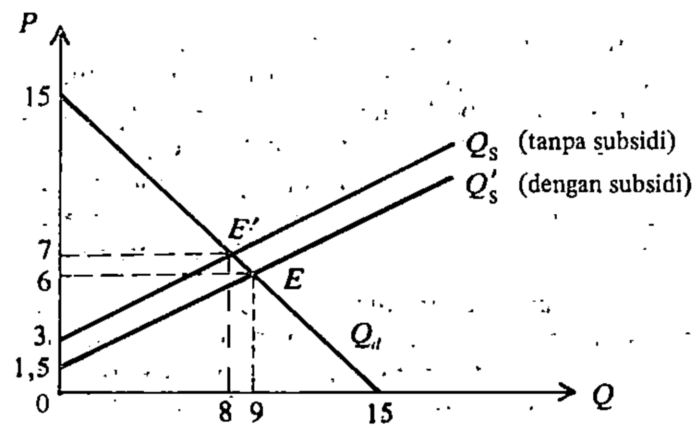
Tanpa subsidi, $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$ (periksa kembali penyelesaian Kasus 6). Dengan subsidi, harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih rendah, persamaan penawaran berubah dan kurvanya bergeser turun.

Penawaran tanpa subsidi : $P = 3 + 0{,}5\,Q$
Penawaran dengan subsidi : $P = 3 + 0{,}5\,Q - 1{,}5$
$P = 1{,}5 + 0{,}5\,Q \rightarrow Q = -3 + 2\,P$

Karena persamaan permintaan tetap $P = 15 - Q$ atau $Q = 15 - P$, maka keseimbangan pasar sesudah subsidi :

$$Q_d = Q_s$$
$$15 - P = -3 + 2P \rightarrow 18 = 3P, \quad P = 6$$
$$Q = 15 - P = 15 - 6 = 9$$

Jadi, dengan adanya subsidi : $P'_e = 6$ dan $Q'_e = 9$.



Gambar 6—12

Bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen. Subsidi produksi yang diberikan oleh pemerintah menyebabkan ongkos produksi yang dikeluarkan oleh produsen menjadi lebih sedikit daripada ongkos sesungguhnya untuk menghasilkan barang tersebut. Perbedaan antara ongkos produksi nyata dan ongkos produksi yang dikeluarkan merupakan bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen. Karena ongkos produksi yang dikeluarkan oleh produsen lebih kecil, ia bersedia menawarkan harga jual yang lebih rendah, sehingga sebagian dari subsidi tadi dinikmati pula oleh konsumen. Besarnya bagian dari subsidi yang diterima, secara tidak langsung, oleh konsumen (sk) adalah selisih antara harga keseimbangan tanpa subsidi (P_e) dan harga keseimbangan dengan subsidi (P'_e).

$$\boxed{sk = P_e - P'_e}$$

Dalam Kasus 9 di atas, $sk = 7 - 6 = 1$. Berarti dari setiap unit barang yang dibelinya konsumen secara tidak langsung menerima subsidi sebesar 1, atau 67% dari subsidi per unit barang.

Bagian subsidi yang dinikmati oleh produsen. Besarnya bagian dari subsidi yang dinikmati oleh produsen (*sp*) adalah selisih antara besarnya subsidi per unit barang (*s*) dan bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen (*sk*).

$$\boxed{sp = s - sk}$$

Dalam Kasus 9 tadi, $sp = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$. Berarti dari setiap unit barang yang diproduksi dan dijualnya produsen menerima subsidi sebesar 0,5, atau 33% dari subsidi per unit barang.

Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah. Besarnya jumlah subsidi yang diberikan oleh pemerintah (*S*) dapat dihitung dengan mengalikan jumlah barang yang terjual sesudah disubsidi (Q') dengan besarnya subsidi per unit barang (*s*).

$$\boxed{S = Q'_e \times s}$$

Dalam kasus ini, $S = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5$.

6.5.5 Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang

Persamaan fungsi permintaan yang berbentuk $Q = a - bP$ mencerminkan hubungan fungsional antara jumlah permintaan dan harga barang yang bersangkutan. Bentuk persamaan seperti ini mengandung asumsi tersirat bahwa permintaan akan suatu barang dipengaruhi hanya oleh harga barang itu sendiri. Faktor-faktor lain, termasuk harga barang lain, dianggap tidak berpengaruh. Dalam kenyataan, ada barang-barang tertentu yang sifat permintaannya tidak hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri, tetapi juga dipengaruhi oleh faktor atau variabel-variabel lain.

Terhadap dua macam barang yang mempunyai hubungan penggunaan, maka permintaan akan barang yang satu bukan saja dipengaruhi oleh (fungsi dari) harga barang itu sendiri, tetapi juga fungsi dari harga barang lainnya. Barang-barang semacam ini adalah barang-barang yang mempunyai hubungan "substitutif" (saling menggantikan), misalnya antara teh dan kopi; dan barang-barang yang mempunyai hubungan "komplementer" (saling melengkapi), misalnya antara kopi dan gula.

Apabila barang *X* dan barang *Y* mempunyai hubungan penggunaan, permintaan akan masing-masing barang dipengaruhi juga oleh harga barang lainnya, maka fungsi permintaan akan masing-masing barang tersebut adalah :

$Q_{dx} = f(P_x, P_y)$ $\quad Q_{dx}$: jumlah permintaan akan X
$\quad Q_{dy}$: jumlah permintaan akan Y

$Q_{dy} = g(P_y, P_x)$ $\quad P_x$: harga X per unit
$\quad P_y$: harga Y per unit.

Oleh karena permintaan akan masing-masing barang merupakan fungsi dari harga dua macam barang, maka keseimbangan pasar yang tercipta adalah keseimbangan pasar untuk kedua macam barang tersebut. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan untuk tiap macam barang dapat dianalisis sekaligus.

Kasus 10

Permintaan akan barang X ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dx} = 10 - 4P_x + 2P_y$, sedangkan penawarannya $Q_{sx} = -6 + 6P_x$. Sementara itu permintaan akan barang Y ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dy} = 9 - 3P_y + 4P_x$, sedangkan penawarannya $Q_{sy} = -3 + 7P_y$. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar untuk masing-masing barang tersebut?

Keseimbangan pasar barang X:

$$Q_{dx} = Q_{sx}$$
$$10 - 4P_x + 2P_y = -6 + 6P_x$$
$$10P_x - 2P_y = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Keseimbangan pasar barang Y:

$$Q_{dy} = Q_{sy}$$
$$9 - 3P_y + 4P_x = -3 + 7P_y$$
$$4P_x - 10P_y = -12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dari (1) dan (2):

$$\begin{array}{rcr|l|rcr}
10P_x - 2P_y & = & 16 & \times 1 & 10P_x - 2P_y & = & 16 \\
4P_x - 10P_y & = & -12 & \times 2{,}5 & 10P_x - 25P_y & = & -30 \quad (-) \\
\hline
 & & & & 23P_y & = & 46 \\
 & & & & P_y & = & 2
\end{array}$$

$P_y = 2$ masuk (1) atau (2), diperoleh $P_x = 2$

Selanjutnya Q_x dan Q_y dapat dihitung dengan memasukkan nilai P_x dan P_y yang telah diperoleh ke dalam persamaan permintaannya atau persamaan penawarannya. Dengan memasukkan $P_x = 2$ dan $P_y = 2$ ke dalam persamaan Q_{dx}, atau $P_x = 2$ ke dalam persamaan Q_{sx}, diperoleh $Q_x = 6$. Kemudian dengan memasukkan $P_x = 2$ dan $P_y = 2$ ke dalam persamaan Q_{dy}, atau $P_y = 2$ ke dalam persamaan Q_{sy}, diperoleh $Q_y = 11$.

Jadi,

P_x equilibrium = 2 $\quad$ P_y equilibrium = 2

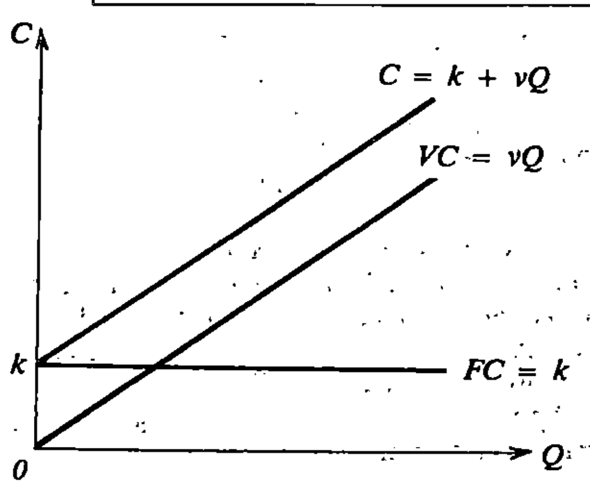
Q_x equilibrium = 6 $\quad$ Q_y equilibrium = 11.

Model analisis "keseimbangan pasar kasus dua macam barang" ini dapat pula diterapkan pada kasus-kasus lebih dari dua macam barang.

6.5.6 Fungsi Biaya dan Fungsi Penerimaan

Fungsi biaya. Biaya total (*total cost*) yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dalam operasi bisnisnya terdiri atas biaya tetap (*fixed cost*) dan biaya variabel (*variable cost*). Sesuai dengan namanya, sifat biaya tetap adalah tidak tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Berapa unitpun barang yang dihasilkan, jumlah biaya tetap dalam jangka pendek senantiasa tidak berubah. Secara matematik, biaya tetap bukan merupakan fungsi dari jumlah barang yang dihasilkan; ia merupakan sebuah konstanta, dan kurvanya berupa sebuah garis lurus sejajar sumbu jumlah. Sebaliknya, biaya variabel tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Semakin banyak jumlah barang yang dihasilkan semakin besar pula biaya variabelnya. Secara matematik, biaya variabel merupakan fungsi dari jumlah barang yang dihasilkan, kurvanya berupa sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$FC = k$$
$$VC = f(Q) = vQ$$
$$C = g(Q) = FC + VC = k + vQ$$



FC : biaya tetap
VC : biaya variabel
C : biaya total
k : konstanta
v : lereng kurva *VC* dan kurva *C*

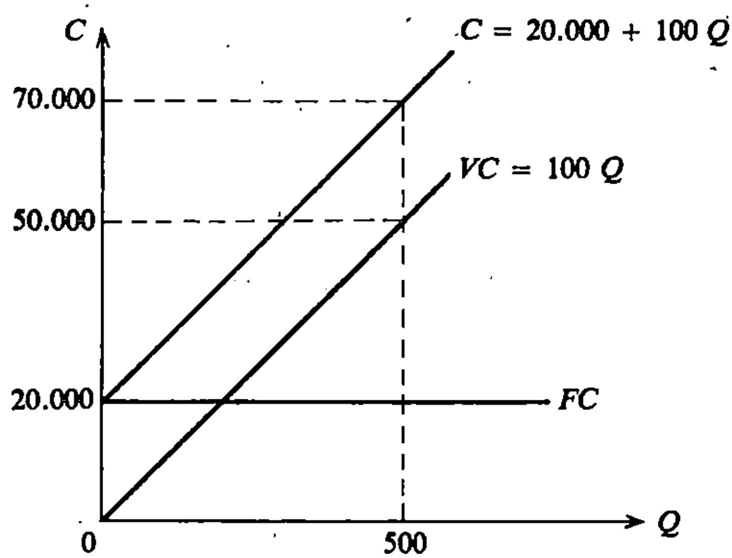
Gambar 6—13

Q pada sumbu horizontal melambangkan jumlah (*quantity*) barang dalam satuan fisik, adapun C pada sumbu vertikal melambangkan biaya (*cost*) dalam satuan moneter.

Kasus 11

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan sebesar Rp 20,00 ribu, sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan $VC = 100\ Q$. Tunjukkan persamaan dan kurva biaya totalnya ! Berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 500 unit barang ?

$$\left.\begin{array}{l} FC = 20.000 \\ VC = 100\ Q \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C = FC + VC \rightarrow C = 20.000 + 100\ Q \\ \text{Jika } Q = 500,\ C = 20.000 + 100\,(500) = 70.000 \end{array}$$



Gambar 6—14

Fungsi penerimaan. Penerimaan sebuah perusahaan dari hasil penjualan barangnya merupakan fungsi dari jumlah barang yang terjual atau dihasilkan. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual semakin besar pula penerimaannya. Penerimaan total (*total revenue*) adalah hasilkali jumlah barang yang terjual dengan harga jual per unit barang tersebut. Secara matematik, penerimaan merupakan fungsi jumlah barang, kurvanya berupa garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$\boxed{R = Q \times P = f(Q)}$$

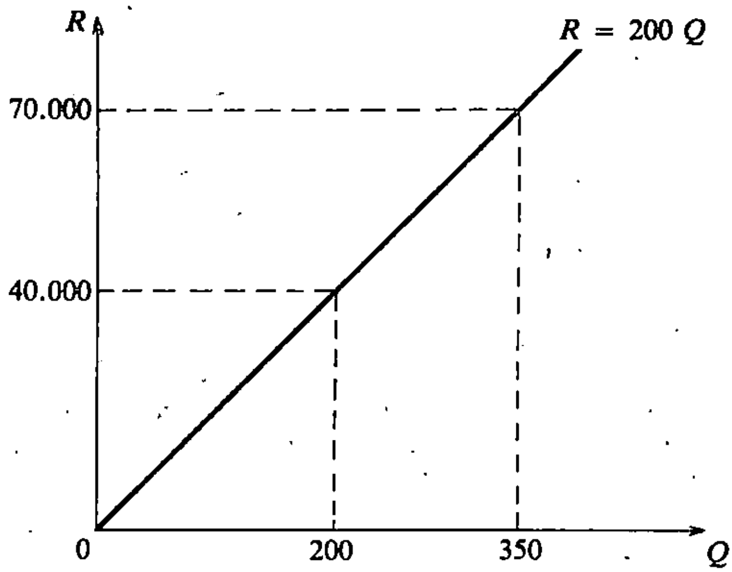
Dalam menganalisis penerimaan selalu dianggap bahwa perusahaan senantiasa berhasil menjual setiap barang yang dihasilkannya. Dengan demikian, Q dalam $R = f(Q)$ bukan saja melambangkan jumlah barang yang dihasilkan, tetapi juga melambangkan jumlah barang yang terjual.

Kasus 12

Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp 200,00 per unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan ini. Berapa besar penerimaannya bila terjual barang sebanyak 350 unit ?

$$R = Q \times P$$
$$= Q \times 200 = 200\,Q$$

Bila $Q = 350$
$R = 200\,(350) = 70.000$

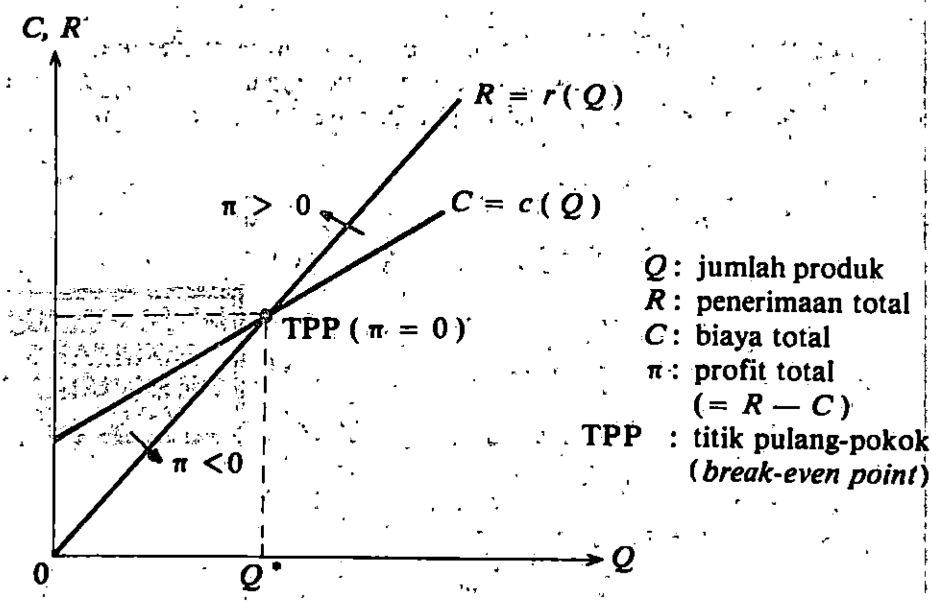


Gambar 6—15

6.5.7 Analisis Pulang-Pokok (BEP)

Penerimaan dan biaya merupakan variabel-variabel penting untuk mengetahui kondisi bisnis suatu perusahaan. Dengan diketahuinya penerimaan total (R) yang diperoleh dan biaya total (C) yang dikeluarkan, dapatlah dianalisis apakah perusahaan mendapat keuntungan ataukah mengalami kerugian. Keuntungan (profit positif, $\pi > 0$) akan didapat apabila $R > C$, secara grafik hal ini terlihat pada area dimana kurva R terletak di atas kurva C. Sebaliknya, kerugian (profit negatif, $\pi < 0$) akan dialami apabila $R < C$; pada area dimana kurva R terletak di bawah kurva C.

Konsep yang lebih penting berkenaan dengan R dan C adalah konsep 'pulang-pokok'' (*break-even*), yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang-pokok (profit nol, $\pi = 0$) terjadi apabila $R = C$; perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula menderita kerugian. Secara grafik hal ini ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan kurva C.



Gambar 6—16

Q^* mencerminkan posisi tingkat produksi/penjualan pulang-pokok. Area di sebelah kanan Q^* merupakan area keuntungan ($\pi > 0$), sedangkan di sebelah kiri Q^* merupakan area kerugian ($\pi < 0$).

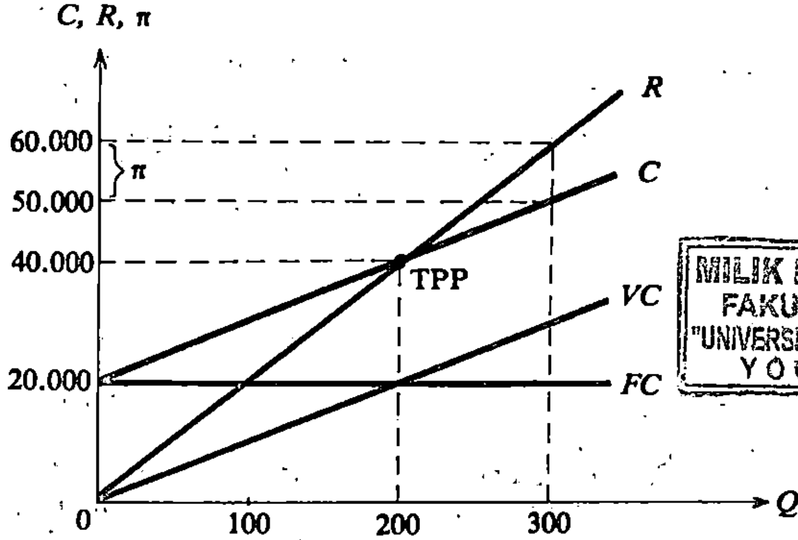
Kasus 13

Andaikan biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 20.000 + 100\ Q$ dan penerimaan totalnya $R = 200\ Q$. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi pulang-pokok ? Apa yang terjadi jika ia berproduksi sebanyak 300 unit ?

$\pi = R - C$
Pulang-pokok : $\pi = 0,\ R - C = 0$
$R = C$
$200\,Q = 20.000 + 100\,Q$
$100\,Q = 20.000$
$Q = 200$

Jika $Q = 300$, maka :
$R = 200\,(300) = 60.000$
$C = 20.000 + 100\,(300)$
$= 50.000$

Keuntungan : $\pi = R - C$
$= 10.000$



Gambar 6—17

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Posisi pulang-pokok terjadi pada tingkat produksi 200 unit, *R* dan *C* sama-sama sebesar 40.000. Pada tingkat produksi 300 unit perusahaan memperoleh keuntungan sebesar 10.000.

6.5.8 Fungsi Anggaran

Dalam ekonomi mikro terdapat dua teori yang membahas tentang fungsi anggaran, yaitu teori produksi dan teori konsumsi. Pada teori produksi, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang produsen membeli dua macam masukan (*input*) atau lebih, berkenaan dengan jumlah dana yang tersedia dan harga masing-masing masukan[1]. Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan isokos (*isocost*). Sedangkan pada teori konsumsi, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang konsumen membeli dua macam keluaran (*output*) atau lebih, berke-

[1] Masukan merupakan pengindonesiaan dari kata *input*, berarti faktor produksi.

naan dengan jumlah pendapatannya dan harga masing-masing keluaran[2]. Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan garis anggaran (*budget line*).

Bentuk umum persamaan fungsi anggaran :

$$\boxed{M = x.P_x + y.P_y}$$

pada teori produksi,

- M : jumlah dana produsen
- x : jumlah masukan X
- y : jumlah masukan Y
- P_x : harga X per unit
- P_y : harga Y per unit

pada teori konsumsi,

- M : jumlah pendapatan konsumen
- x : jumlah keluaran X
- y : jumlah keluaran Y
- P_x : harga X per unit
- P_y : harga Y per unit

Kasus 14

Bentuklah persamaan anggaran seorang konsumen untuk barang X dan barang Y apabila pendapatan yang disediakannya sebesar Rp 100.000,00, sedangkan harga barang X dan barang Y masing-masing Rp 500,00 dan Rp 1.000,00 per unit. Jika semua pendapatan yang dianggarkan dibelanjakan untuk barang X, berapa unit X dapat dibelinya ? Berapa unit Y dapat dibeli kalau ia hanya membeli 100 unit X ?

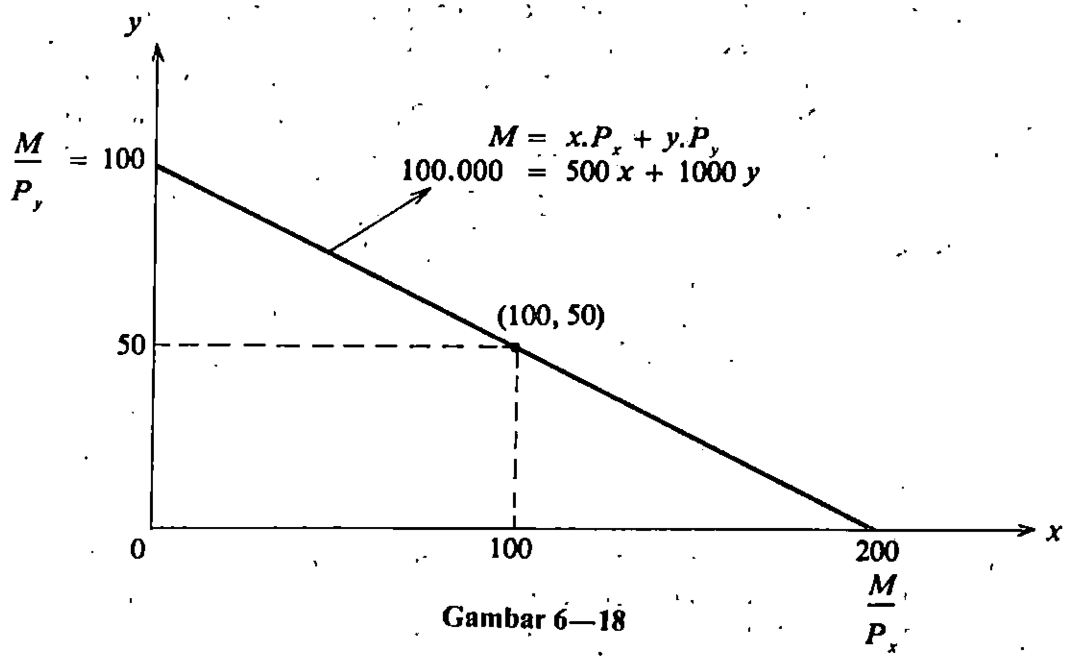
$$M = x.P_x + y.P$$
$$100.000 = x.500 + y.1000$$
$$100.000 = 500\,x + 1000\,y$$

Jika semua pendapatan dibelanjakan untuk barang X ($y = 0$), maka jumlah X yang dapat dibeli : $x = M / P_x = 100.000/500 = 200$ unit.

Kalau $x = 100$, maka : $M = x.P_x + y.P_y$

$$100.000 = (100)(500) + y(1000)$$
$$100.000 = 50.000 + 1000\,y \rightarrow y = 50 \text{ unit.}$$

[2] Keluaran merupakan pengindonesiaan dari kata *output*, berarti hasil produksi.



Gambar 6—18

6.5.9 Fungsi Konsumsi, Fungsi Tabungan dan Angka-Pengganda

Dalam ekonomi makro, pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan (pendapatan nasional) dialokasikan ke dua kategori penggunaan, yakni dikonsumsikan dan ditabung. Jika pendapatan dilambangkan dengan Y, sedangkan konsumsi dan tabungan masing-masing dilambangkan dengan C dan S, maka kita dapat merumuskan kesamaan :

$$\boxed{Y \equiv C + S}$$

Baik konsumsi nasional maupun tabungan nasional pada umumnya dilambangkan sebagai fungsi linear dari pendapatan nasional. Keduanya berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Semakin besar pendapatan semakin besar pula konsumsi dan tabungannya. Sebaliknya, apabila pendapatan berkurang, konsumsi dan tabungan pun akan berkurang pula.

Fungsi konsumsi. Fungsi konsumsi menjelaskan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional, yang secara umum dirumuskan sebagai :

$$\boxed{C = f(Y) = C_0 + c\,Y}$$

C_0 : konsumsi otonom
c : $MPC = \Delta C / \Delta Y$

Konstanta C_0 menunjukkan besarnya konsumsi nasional pada pendapatan nasional sebesar nol; mencerminkan konsumsi nasional minimum *(autonomous consumption*, konsumsi otonom) yang pasti ada atau harus tersedia, meskipun pendapatan nasionalnya nihil. Secara grafik, C_0 merupakan penggal kurva konsumsi pada sumbu vertikal C. Koefisien c mencerminkan besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional sejumlah tertentu. Dalam bahasa ekonomi, c adalah *Marginal Propensity to Consume.* Secara grafik, c merupakan lereng dari kurva konsumsi.

Fungsi tabungan. Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dan pendapatan nasional, yang secara umum dirumuskan sebagai :

$$\boxed{S = g(Y) = S_0 + sY}$$

S_0 : tabungan otonom
s : $MPS = \Delta S / \Delta Y$

Konstanta S_0, yaitu tabungan otonom (*autonomous saving*), merupakan penggal kurva tabungan pada sumbu vertikal S. Koefisien s (*Marginal Propensity to Save, MPS*) merupakan lereng dari kurva tabungan.

Persamaan fungsi tabungan dapat pula diturunkan dengan memanfaatkan kesamaan $Y \equiv C + S$.

$$Y = C + S \rightarrow S = Y - C$$
$$S = Y - C_0 - cY \qquad \text{sebab } C = C_0 + cY$$
$$S = -C_0 + (1 - c)Y$$

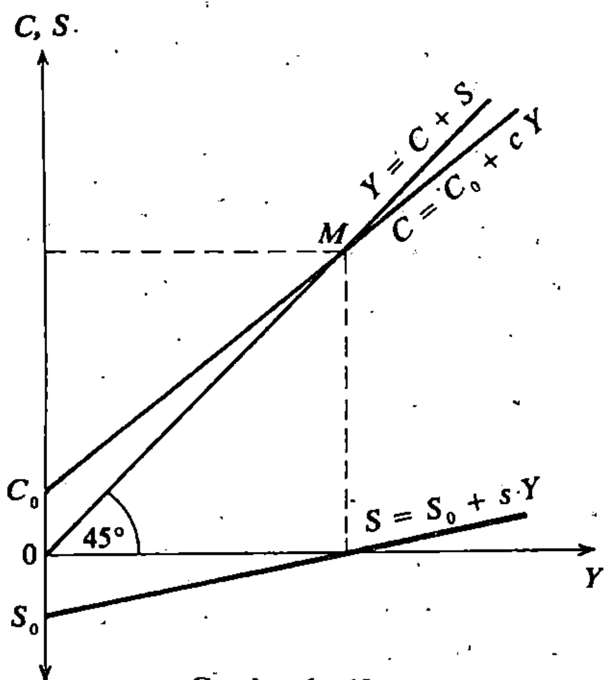
Jadi,

$$S_0 + sY = S = -C_0 + (1 - c)Y$$

Dapat disimpulkan bahwa :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} S_0 = -C_0 & & \\ s = 1 - c & \rightarrow & c + s = 1 \\ MPS = 1 - MPC & \rightarrow & MPC + MPS = 1 \end{array}}$$

Kurva konsumsi dan kurva tabungan dapat digambarkan secara bersama-sama pada sistem sumbu-silang.



Gambar 6—19

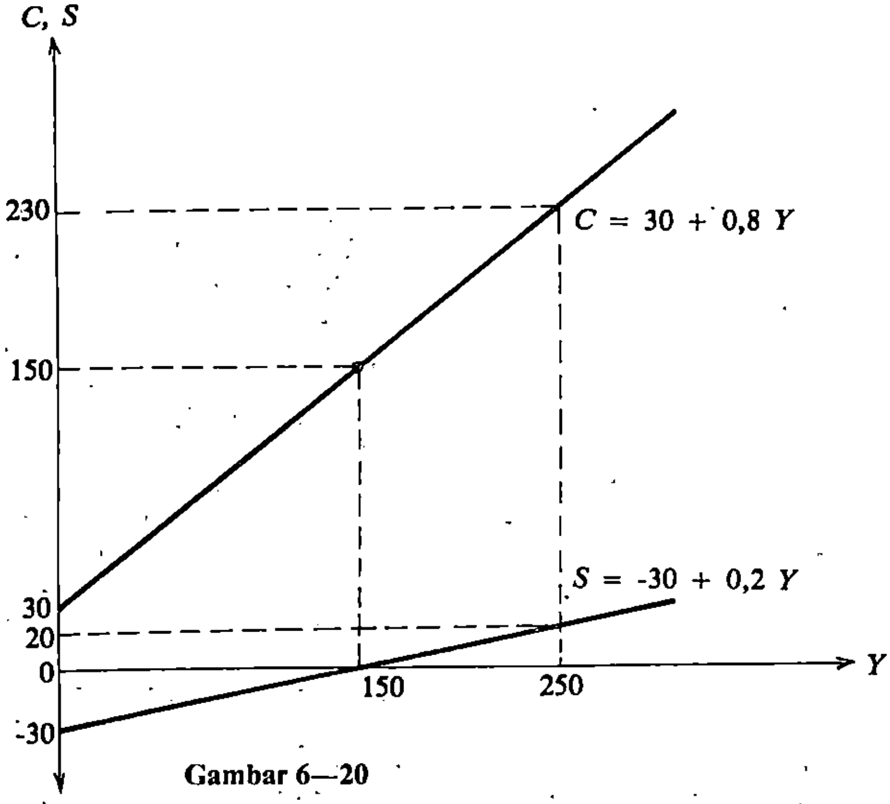
Garis bantu [$Y = C + S$] yang membentuk sudut 45° merupakan penjumlahan grafis kurva C dan kurva S. Setiap titik pada garis bantu ini berjarak sama terhadap sumbu horizontal maupun sumbu vertikal. Berarti setiap titik pada garis ini mencerminkan jumlah yang sama antara Y dan $C + S$. Pada titik M terlihat bahwa $S = 0$, berarti seluruh pendapatan dialokasikan untuk keperluan konsumsi. Di sebelah kanan titik M, pendapatan lebih besar daripada konsumsi sehingga kelebihan pendapatan tersebut bisa ditabung; hal ini tercermin dari positifnya kurva S. Sedangkan di sebelah kiri titik M pendapatan lebih kecil daripada konsumsi, berarti sebagian konsumsi dibiayai bukan dari pendapatan sendiri, melainkan dari sumber lain misalnya pinjaman atau hutang. Dalam hal ini tabungannya negatif (*dissaving*). Pada titik pangkal O (0,0) seluruh konsumsi bahkan dibiayai bukan dari pendapatan, besarnya konsumsi sama dengan tabungan-negatif.

Kasus 15

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 30 + 0{,}8\ Y$. Bagaimana fungsi tabungannya ?

Berapa besarnya konsumsi jika tabungan sebesar 20 ?

$S = Y - C$	Jika $S = 20$
$= Y - (30 + 0{,}8\ Y)$	$20 = -30 + 0{,}2\ Y$
$= Y - 30 - 0{,}8\ Y$	$50 = 0{,}2\ Y \rightarrow Y = 250$
$= -30 + 0{,}2\ Y$	Maka $C = Y - S = 230$



Gambar 6—20

Angka-pengganda. Angka-pengganda ialah suatu bilangan yang menjelaskan tambahan pendapatan nasional sebagai akibat adanya perubahan pada variabel-variabel tertentu dalam perekonomian. Secara umum, dalam model perekonomian yang paling sederhana, angka-pengganda (*multiplier*) dirumuskan sebagai : *)

$$\boxed{k = \frac{1}{1 - c} = \frac{1}{s}} \qquad \begin{array}{l} c \equiv MPC \\ s \equiv MPS \end{array}$$

Dalam Kasus 15 di atas $MPS = 0{,}2$, berarti angka-penggandanya $(k) = 5$. Dengan $k = 5$ berarti bahwa apabila variabel ekonomi tertentu — misalnya investasi atau pengeluaran pemerintah — ditambah sejumlah tertentu, maka pendapatan nasional akan bertambah sebesar 5 kali tambahan variabel tadi.

*)Rumus-rumus angka-pengganda secara terinci dapat dilihat di dalam Seksi 6.5.14.

6.5.10 Pendapatan Disposabel

Pendapatan nasional pada dasarnya merupakan penjumlaha[illegible] pendapatan semua sektor di dalam satu negara, meliputi sektor ruma[illegible] (orang perseorangan), sektor badan usaha dan sektor pemerintah. Penda[illegible] disposabel (*disposable income*) adalah pendapatan nasional yang secara ny[illegible] dapat dibelanjakan oleh masyarakat; tidak termasuk di dalamnya pendapatan pemerintah seperti pajak, cukai dan sebagainya. Dengan dikenakannya pajak, maka pendapatan yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat berkurang sebesar pajak tersebut. Sebagai gambaran : jika pendapatan nasional adalah sebesar Y, tetapi di dalamnya termasuk pendapatan pemerintah atau pajak sebesar T, maka pendapatan yang secara nyata dapat dibelanjakan (dikonsumsi dan ditabung) oleh masyarakat hanyalah sebesar $Y_d = Y - T$. Jadi, pajak merupakan variabel yang memperkecil pendapatan disposabel.

Selain variabel yang memperkecil, ada pula variabel yang memperbesar pendapatan disposabel. Variabel tersebut adalah pembayaran-pembayaran khusus dari pemerintah kepada masyarakat yang sifatnya merupakan pembayaran ekstra atau tunjangan; misalnya berupa tunjangan pensiun, tunjangan hari raya, gaji bulan ke-13, atau sumbangan buat korban bencana alam. Pembayaran-pembayaran khusus yang bersifat ekstra ini (bagi masyarakat merupakan penerimaan ekstra) dalam ekonomi makro dikenal dengan sebutan pembayaran alihan (*transfer payment*), karena ia hanya merupakan pengalihan uang dari pemerintah ke masyarakat, bukan merupakan imbalan langsung atas jasa masyarakat pada pemerintah dalam tahun yang berjalan. Sebagai gambaran : jika pendapatan nasional adalah sebesar Y, tetapi di samping itu pemerintah juga mengeluarkan pembayaran alihan sebesar R, maka pendapatan disposabelnya menjadi $Y_d = Y + R$.

Berdasarkan terdapat tidaknya pajak (T) dan pembayaran alihan (R) di dalam perekonomian suatu negara, besarnya pendapatan disposabel (Y_d) masyarakat negara yang bersangkutan dapat dirinci sebagai berikut :

- Dalam hal tidak terdapat pajak maupun pembayaran alihan,

$$\boxed{Y_d = Y}$$

Y : pendapatan nasional
Y_d : pendapatan disposabel

- Dalam hal hanya terdapat pajak,

$$\boxed{Y_d = Y - T}$$

alam hal hanya terdapat pembayaran alihan,

$$\boxed{Y_d = Y + R}$$

- Dalam hal terdapat pajak maupun pembayaran alihan,

$$\boxed{Y_d = Y - T + R}$$

Sesungguhnya pendapatan disposabel (Y_d)-lah, dan bukannya pendapatan nasional (Y), yang merupakan variabel bebas dalam persamaan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan. Dengan demikian, rumusan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan yang sebenarnya bukanlah $C = f(Y)$ dan $S = g(Y)$, melainkan :

$$\boxed{\begin{array}{lll} C = f(Y_d) & S = g(Y_d) & \text{dan} \\ \quad = C_0 + c\,Y_d & \quad = S_0 + s\,Y_d & C + S = Y_d \end{array}}$$

Dalam uraian sebelum ini, kita mendapati rumusan fungsi konsumsi $C = f(Y) = C_0 + c\,Y$. Dalam kasus tersebut memang tidak disebutkan tentang adanya pajak dan pembayaran alihan, sehingga praktis $Y_d = Y$, dan $C = C_0 + c\,Y_d$ sama artinya dengan $C = C_0 + c\,Y$. Untuk selanjutnya, anda harus berpedoman pada rumusan yang baku yakni $C = f(Y_d)$, begitu pula $S = g(Y_d)$.

Kasus 16

Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh $C = 30 + 0{,}8\,Y_d$. Jika pemerintah menerima dari masyarakat pembayaran pajak sebesar 16 dan pada tahun yang sama memberikan pada warganya pembayaran alihan sebesar 6, berapa konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 200 ? Berapa pula tabungan nasional ?

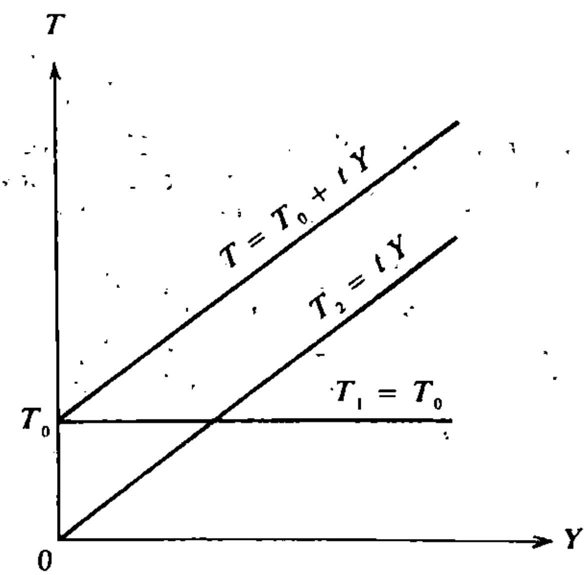
$$Y_d = Y - T + R = 200 - 16 + 6 = 190$$

$$\begin{aligned} C &= 30 + 0{,}8\,Y_d \\ &= 30 + 0{,}8\,(190) = 182 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S &= Y_d - C \\ &= 190 - 182 = 8 \end{aligned}$$

6.5.11 Fungsi Pajak

Pajak yang dikenakan oleh pemerintah pada warganya bersifat dua macam. Pertama ialah pajak yang jumlahnya tertentu, tidak dikaitkan dengan tingkat pendapatan. Secara matematik, $T = T_0$; kurva pajaknya berupa sebuah garis lurus sejajar sumbu pendapatan. Kedua ialah pajak yang penetapannya dikaitkan dengan tingkat pendapatan, besarnya merupakan proporsi atau persentase tertentu dari pendapatan. Secara matematik, $T = t\,Y$; kurva pajaknya berupa sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

Secara keseluruhan, besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah adalah $T = T_0 + t\,Y$; kurva pajaknya berupa sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari penggal T_0.



$$T = T_0 + tY$$

T_0 : pajak otonom (*autonomous tax*)

t : proporsi pajak terhadap pendapatan

Gambar 6—21

6.5.12 Fungsi Investasi

Permintaan akan investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga. Jika investasi dilambangkan dengan huruf I dan tingkat bunga (*interest rate*) dilambangkan dengan huruf i, maka secara umum fungsi (permintaan akan) investasi dapat dituliskan sebagai :

$$\boxed{\begin{aligned} I &= f(i) \\ I &= I_0 - p\,i \end{aligned}}$$

I_0 : investasi otonom

i : tingkat bunga

p : proporsi I terhadap i

Permintaan akan investasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Dengan logika ekonomi hal ini sangat mudah dipahami. Apabila tingkat bunga tinggi, orang akan lebih senang menyimpan uangnya di bank daripada menginvestasikannya, sebab hasil harapan (*expected return*) yang akan diperoleh dari bunga bank lebih besar daripada hasil harapan yang akan diterima dari penanaman modal, akibatnya permintaan akan investasi berkurang. Tingginya bunga mencerminkan pula mahalnya kredit, sehingga mengurangi gairah berinvestasi di kalangan (calon) pengusaha. Hal sebaliknya terjadi jika tingkat bunga rendah.

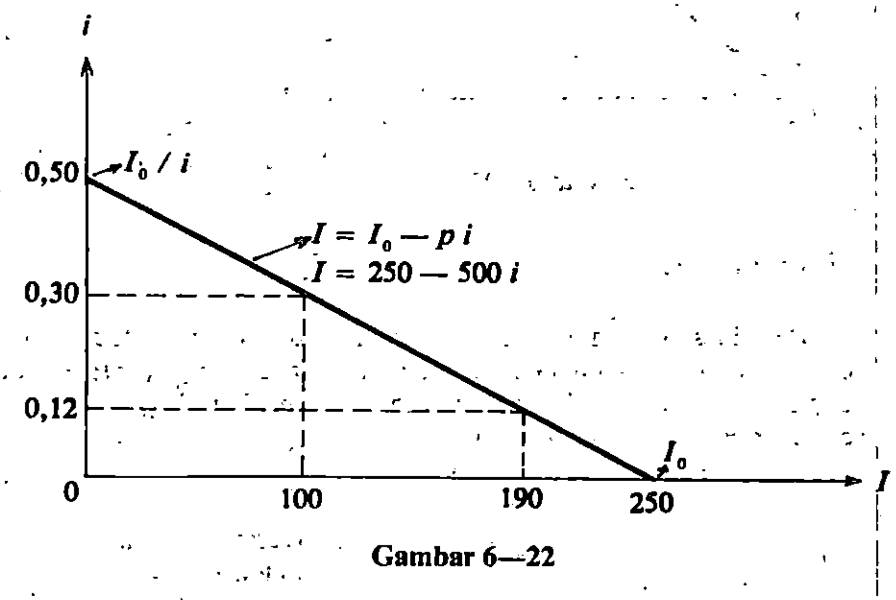
Dalam menggambarkan kurva permintaan akan investasi terdapat "kebiasaan aneh" di kalangan ekonom, yakni variabel bebasnya (i) diletakkan pada sumbu vertikal dan variabel terikatnya (I) justru ditempatkan pada sumbu horizontal. Perhatikan contoh berikut.

Kasus 17

Jika permintaan akan investasi ditunjukkan oleh $I = 250 - 500\,i$, berapa besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank yang berlaku setinggi 12% ? Berapa pula investasi bila tingkat bunga tersebut 30% ?

$I = 250 - 500\,i$

Jika $i = 12\% = 0{,}12$,	Jika $i = 30\% = 0{,}30$,
$I = 250 - 500\,(0{,}12)$	$I = 250 - 500\,(0{,}30)$
$= 250 - 60 = 190$	$= 250 - 150 = 100$



Gambar 6—22

6.5.13 Fungsi Impor

Impor suatu negara merupakan fungsi dari pendapatan nasionalnya, dan cenderung berkorelasi positif. Semakin besar pendapatan nasional suatu negara, semakin besar pula kebutuhan atau hasratnya akan barang-barang dari luar negeri (terutama barang modal, bagi negara yang sedang berkembang), sehingga nilai impornya pun semakin besar.

$$\boxed{M = M_0 + m\,Y}$$

M_0 : impor otonom
Y : pendapatan nasional
m : *marginal propensity to import* = $\Delta M / \Delta Y$.

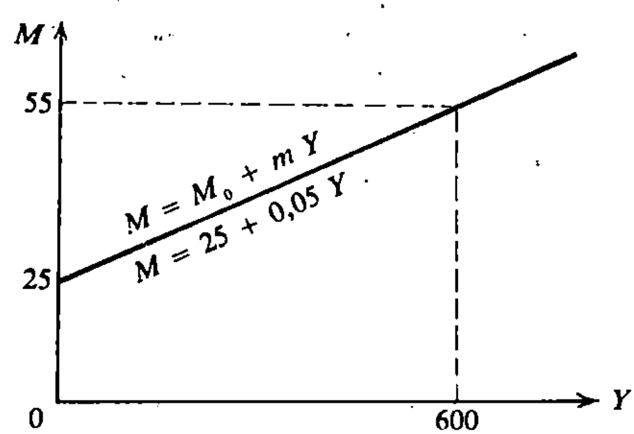
Kasus 18

Bentuklah persamaan impor suatu negara bila diketahui impor otonomnya 25 dan marginal propensity to import-nya 0,05. Berapa nilai impornya jika pendapatan nasional sebesar 600 ?

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 25 \\ m &= 0{,}05 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} M &= M_0 + m\,Y \\ M &= 25 + 0{,}05\,Y \end{aligned}$$

Pada tingkat $Y = 600$,

$$\begin{aligned} M &= 25 + 0{,}05\,(600) \\ &= 25 — 30 \\ &= 55 \end{aligned}$$



Gambar 6 – 23

6.5.14 Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional adalah jumlah nilai seluruh keluaran (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu negara dalam jangka waktu tertentu. Penghitungan pendapatan nasional dapat dilakukan dengan tiga macam pendekatan yaitu pendekatan produksi, pendekatan pendapatan dan pendekatan pengeluaran. Ditinjau dari segi pendekatan pengeluaran, pendapatan nasional adalah jumlah pengeluaran yang dilakukan oleh seluruh sektor di dalam suatu negara. Sektor-sektor perekonomian yang dimaksud adalah sektor rumah tangga, sektor badan usaha, sektor pemerintah dan sektor perdagangan dengan luar negeri. Pengeluaran sektor rumah tangga dicerminkan oleh konsumsi masyarakat (C), pengeluaran sektor badan usaha dicerminkan oleh investasi yang dilakukan oleh perusahaan-perusahaan (I), pengeluaran sektor pemerintah dicerminkan oleh pengeluaran pemerintah (G), sedangkan pengeluaran perdagangan dengan luar negeri tercermin dari selisih antara ekspor dan impor negara yang bersangkutan ($X - M$).

Analisis pendapatan nasional selalu bertolak dari anggapan mengenai model perekonomian yang sedang dibahas. Dalam hal ini dikenal tiga macam model perekonomian. Pertama ialah model perekonomian sederhana; di sini dianggap bahwa perekonomian hanya terdiri atas 2 sektor, yaitu sektor rumah tangga dan sektor badan usaha; tidak terdapat sektor pemerintah dan sektor perdagangan dengan luar negeri. Kedua ialah model perekonomian tertutup; perekonomian terdiri atas 3 sektor, yaitu dua sektor yang telah disebut sebelumnya dan sektor pemerintah; tidak terdapat sektor perdagangan dengan luar negeri. Ketiga ialah model perekonomian terbuka; perekonomian terdiri atas 4 sektor termasuk sektor perdagangan dengan luar negeri; ini merupakan model yang paling lengkap dan nyata.

Dengan demikian, kesamaan pendapatan nasional menurut pendekatan pengeluaran adalah :

$\boxed{Y \equiv C + I}$ untuk perekonomian 2 sektor (model perekonomian sederhana)

$\boxed{Y \equiv C + I + G}$ untuk perekonomian 3 sektor (model perekonomian tertutup)

$\boxed{Y \equiv C + I + G + (X - M)}$ untuk perekonomian 4 sektor (model perekonomian terbuka)

Beberapa variabel dalam kesamaan pendapatan nasional di atas dapat berupa konstanta (disebut variabel eksogen) atau berupa fungsi (disebut variabel endogen), tergantung pada data yang tersedia atau diketahui.

Kasus 19

Hitunglah pendapatan nasional suatu negara jika diketahui konsumsi otonom masyarakatnya sebesar 500, $MPS = 0{,}2$, investasi yang dilakukan oleh sektor badan usaha sebesar 300 dan pengeluaran pemerintahnya sebesar 250. Sedangkan nilai ekspor dan impor masing-masing 225 dan 175.

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = 500 \\ c = MPC = 0{,}8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = C_0 + c\,Y_d = 500 + 0{,}8\,Y_d = 500 + 0{,}8\,Y \\ \text{sebab } Y_d = Y - T + R = Y - 0 + 0 = Y \end{array}$$

$$Y = C + I + G + (X - M)$$
$$Y = 500 + 0{,}8\,Y + 300 + 250 + (225 - 175)$$
$$Y - 0{,}8\,Y = 1100 \rightarrow 0{,}2\,Y = 1100 \rightarrow Y = 5500.$$

Dalam model perekonomian terbuka yang kompleks, perhitungan angka-pengganda (*multiplier*)-nya cukup rumit. Untuk contoh di atas tadi angka-penggandanya dapat dihitung dengan menggunakan rumus yang diperkenalkan di dalam Seksi 6.5.9 (lihat halaman 112), yakni $k = 1 / MPS = 1/0{,}2 = 5$. Cukup mudah menghitungnya, sebab variabel-variabel selain C bersifat eksogen (berupa konstanta, bukan berupa fungsi), pula tidak terdapat unsur pajak (T) dan pembayaran alihan (R). Persoalannya akan menjadi lain jika terdapat pajak dan pembayaran alihan, serta keduanya bersama-sama dengan impor (M) merupakan fungsi dari pendapatan nasional (Y).

Andaikan kita memiliki data sebagai berikut :

$$C = C_0 + c\,Y_d$$
$$I = I_o \text{ (konstanta)}$$
$$G = G_o \text{ (konstanta)}$$
$$\left.\begin{array}{l} T = T_o + t\,Y \\ R = R_o + r\,Y \end{array}\right\} \quad \text{berarti} \quad \begin{array}{l} Y_d = Y - T + R \\ Y_d = Y - T_o - t\,Y + R_o + r\,Y \end{array}$$
$$X = X_o \text{ (konstanta)}$$
$$M = M_o + m\,Y \quad \text{sehingga} \quad C = C_o + c(Y - T_o - t\,Y + R_o + r\,Y)$$
$$C = C_o + c\,Y - c\,T_o - c\,t\,Y + c\,R_o + c\,r\,Y$$

Kesamaan pendapatan nasionalnya :

$$Y = C + I + G + (X - M)$$
$$Y = C_o + c\,Y - c\,T_o - c\,t\,Y + c\,R_o + c\,r\,Y + I_o + G_o + X_o - M_o - m\,Y$$
$$Y - c\,Y + c\,t\,Y - c\,r\,Y + m\,Y = C_o - c\,T_o + c\,R_o + I_o + G_o + X_o - M_o$$
$$Y(1 - c + c\,t - c\,r + m) = C_o - c\,T_o + c\,R_o + I_o + G_o + X_o - M_o$$

Jika kita sederhanakan $(1 - c + ct - cr + m) = \alpha$, maka :

$$Y\alpha = C_o - cT_o + cR_o + I_o + G_o + X_o - M_o$$

$$Y = \frac{1}{\alpha}(C_o - cT_o + cR_o + I_o + G_o + X_o - M_o)$$

Angka penggandanya, secara umum, ialah :

$k = \dfrac{1}{\alpha}$ di mana $\alpha = 1 - c + ct - cr + m$

c : marginal propensity to consume
t : marginal propensity to tax
r : marginal propensity to transfer
m : marginal propensity to import.

Angka-pengganda khusus untuk masing-masing variabel adalah :

- Angka-pengganda konsumsi : $k_C = \dfrac{1}{\alpha}$
- Angka-pengganda pajak : $k_T = \dfrac{-c}{\alpha}$
- Angka-pengganda pembayaran alihan : $k_R = \dfrac{c}{\alpha}$
- Angka-pengganda investasi : $k_I = \dfrac{1}{\alpha}$
- Angka-pengganda pengeluaran pemerintah : $k_G = \dfrac{1}{\alpha}$
- Angka-pengganda ekspor : $k_X = \dfrac{1}{\alpha}$
- Angka-pengganda impor : $k_M = \dfrac{-1}{\alpha}$

Angka-pengganda hanya berlaku untuk menghitung secara langsung perubahan pendapatan nasional (Y) sehubungan dengan perubahan pada variabel-variabel yang bersifat otonom (perubahan pada C_o, T_o, R_o, I_o, G_o, X_o dan M_o). Angka-pengganda untuk pajak dan impor bertanda negatif, sebab perubahan pajak dan perubahan impor membuahkan perubahan yang berlawanan arah pada pendapatan nasional.

Kasus 20

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 1500 + 0{,}75\ Y_d$. Investasi dan pengeluaran pemerintah masing-masing sebesar 2000 dan 1000. Pajak yang diterima dan pembayaran alihan yang dilakukan oleh pemerintah masing-masing dicerminkan oleh $T = 500 + 0{,}25\ Y$ dan $R = 100 + 0{,}05\ Y$. Jika nilai ekspornya 1250 dan impornya dicerminkan oleh $M = 700 + 0{,}10\ Y$, hitunglah pendapatan nasional negara tersebut. Hitung pula konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya. Berapa pendapatan nasional yang baru seandainya pemerintah menaikkan pengeluarannya menjadi sama seperti nilai eskpor ?

$Y_d = Y - T + R = Y - 500 - 0{,}25\ Y + 100 + 0{,}05\ Y = 0{,}80\ Y - 400$
sehingga $C = 1500 + 0{,}75\ (0{,}80\ Y - 400) = 1200 + 0{,}60\ Y$
$Y = C + I + G + (X - M)$
$Y = 1200 + 0{,}60\ Y + 2000 + 1000 + 1250 - 700 - 0{,}10\ Y$
$Y = 4750 + 0{,}50\ Y \rightarrow 0{,}50\ Y = 4750 \rightarrow Y = 9500$

Pendapatan nasionalnya adalah 9500.
Pendapatan disposabel : $Y_d = 0{,}80\ Y - 400 = 0{,}80\ (9500) - 400 = 7200.$
$C = 1500 + 0{,}75\ Y_d = 1500 + 0{,}75(7200) = 6900$
$S = Y_d - C = 7200 - 6900 = 300.$
$T = 500 + 0{,}25\ Y = 500 + 0{,}25\ (9500) = 2875$
$R = 100 + 0{,}05\ Y = 100 + 0{,}05\ (9500) = 575.$
$M = 700 + 0{,}10\ Y = 700 + 0{,}10\ (9500) = 1650.$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - c + ct - cr + m \\ &= 1 - 0{,}75 + 0{,}75\ (0{,}25) - 0{,}75\ (0{,}05) + 0{,}10 \\ &= 1 - 0{,}75 + 0{,}1875 - 0{,}0375 + 0{,}10 = 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad k_G = 1 / \alpha = 1/0{,}05 = 2$$

$$G' = X = 1250, \text{ berarti } \Delta G = G' - G = 1250 - 1000 = 250$$
$$\rightarrow \quad \Delta Y = k_G \times \Delta G = 2 \times 250 = 500$$

Pendapatan nasional yang baru : $Y' = Y + \Delta Y$
$Y' = 9500 + 500 = 10.000$

6.5.15 Analisis IS-LM

Dalam ekonomi makro, pasar dibeda-bedakan berdasarkan "obyek"-nya menjadi 3 macam : pasar barang (termasuk jasa), pasar uang (termasuk modal) dan pasar tenaga kerja. Analisis yang membahas keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang dikenal dengan sebutan analisis IS-LM. Alat analisis yang digunakan adalah kurva IS dan kurva LM.

Kurva IS. Kurva IS ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar barang. Untuk model perekonomian sederhana (dua sektor), persamaan kurva IS dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan investasi (*I, investment*) terhadap persamaan tabungan (*S, saving*).

$$\left.\begin{array}{l} I = I_o - pi \\ S = S_0 + sY \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} I = & S \\ I_o - pi = & S_0 + sY \end{array}\right\} \quad Y = \frac{I_o - S_o}{s} - \frac{p}{s} i$$

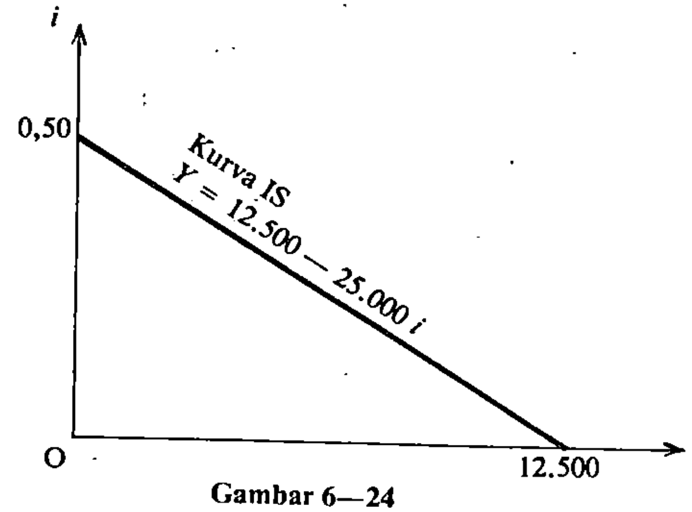
Dengan menyederhanakan $(I_o - S_o) / s = Y_b$ dan $p / s = b$, bentuk umum persamaan kurva IS dapat ditulis sebagai :

$$\boxed{Y = f(i) = Y_b - b\,i}$$

Kasus 21

Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva IS untuk $C = 500 + 0{,}80\,Y$ dan $I = 2000 - 5000\,i$.

$$\left.\begin{array}{l} C = 500 + 0{,}80\,Y \\ \quad \rightarrow S = -500 + 0{,}20\,Y \\ I = 2000 - 5000\,i \end{array}\right\} I = S \rightarrow \begin{array}{l} 2000 - 5000\,i = -500 + 0{,}20\,Y \\ 2500 - 5000\,i = 0{,}20\,Y \\ Y = 12.500 - 25.000\,i \end{array}$$



Gambar 6—24

Kurva LM. Kurva LM ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar uang. Persamaan kurva LM dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan permintaan akan uang (*L, liquidity preference*) terhadap persamaan penawaran uang (*M, money supply*).

Permintaan akan uang : $L = L_o + kY - hi$
Penawaran uang : $M = M_o$

$$L = M \rightarrow L_o + kY - hi = M_o \rightarrow Y = \frac{M_o - L_o}{k} + \frac{h}{k}i$$

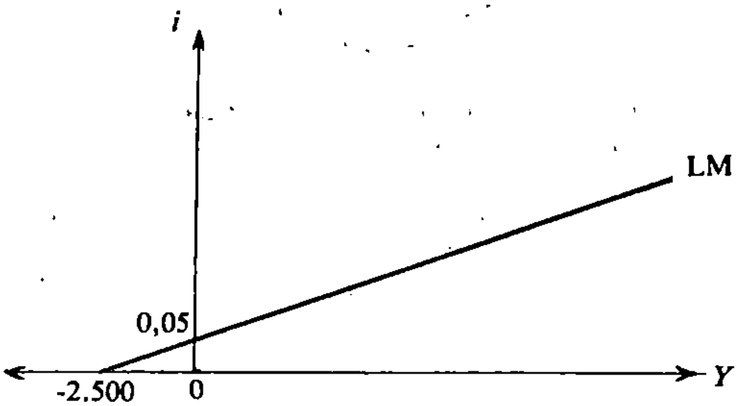
Dengan menyederhanakan $(M_o - L_o)/k = Y_u$ dan $h/k = u$, bentuk umum persamaan kurva LM dapat ditulis sebagai :

$$\boxed{Y = g(i) = Y_u + ui}$$

Kasus 22

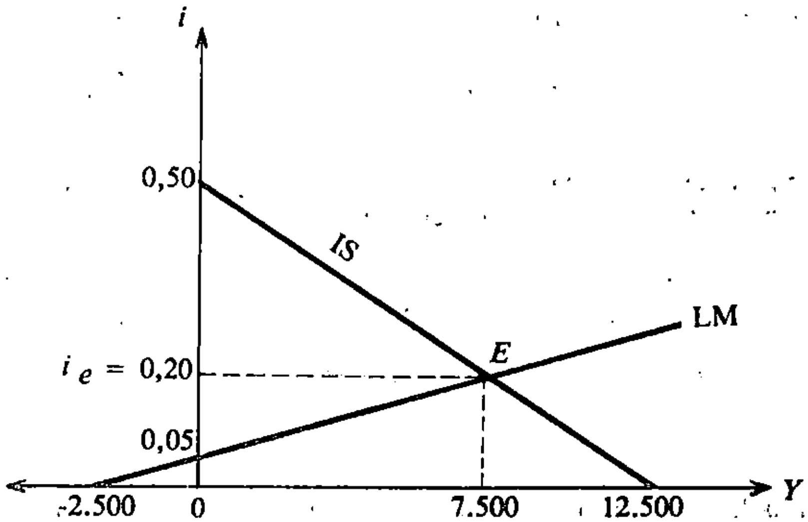
Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva LM jika permintaan akan uang ditunjukkan oleh $L = 10.000 + 0{,}4\,Y - 20.000\,i$ dan jumlah uang yang ditawarkan (beredar) sebesar 9.000.

$$L = M \rightarrow 10.000 + 0{,}4\,Y - 20.000\,i = 9.000$$
$$0{,}4\,Y = -1.000 + 20.000\,i$$
$$Y = -2.500 + 50.000\,i$$



Gambar 6—25

Keseimbangan serempak. Keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva IS dan kurva LM. Pada posisi ini tercipta tingkat bunga keseimbangan dan pendapatan keseimbangan. Untuk IS dalam Kasus 21 dan LM dalam Kasus 22 di atas, keseimbangan serempak tercipta pada tingkat bunga 20% dan pendapatan nasional sebesar 7.500.



Gambar 6—26

$$
\begin{aligned}
IS &= LM \\
12.500 - 25.000\ i &= -2.500 + 50.000\ i \\
15.000 &= 75.000\ i \\
i &= 0,20
\end{aligned}
$$

Dengan memasukkan $i = 0,20$ ke dalam persamaan IS atau LM diperoleh $Y = 7.500$.

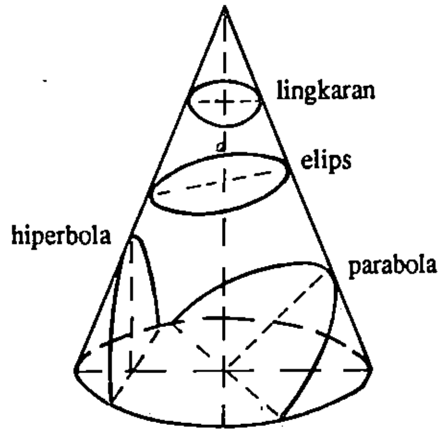
BAB 7
HUBUNGAN NON-LINEAR

Pemahaman akan fungsi-fungsi non-linear dalam mempelajari ilmu ekonomi tidak kalah pentingnya dengan pemahaman akan fungsi linear. Meskipun banyak hubungan antarvariabel ekonomi cukup dapat diterangkan dengan model linear, namun tidak sedikit pula yang lebih realistik dan rasional ditelaah dengan model non-linear. Bahkan sebagian dari model ekonomi linear yang ada sesungguhnya merupakan penyederhanaan dari hubungan-hubungan yang non-linear, merupakan linearisasi dari model non-linear.

Bab ini menguraikan karakteristik-karakteristik penting dari fungsi non-linear. Empat macam bentuk fungsi non-linear yang paling sering dijumpai dalam analisis ekonomi merupakan titik perhatian. Keempatnya adalah fungsi kuadrat parabolik, fungsi kubik, fungsi eksponensial dan fungsi logaritmik.

7.1 FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat atau fungsi berderajat dua ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $y = a + bx + cx^2$, $c \neq 0$. Gambar dari suatu fungsi kuadrat dapat berupa salah satu dari empat kemungkinan bentuk potongan kerucut : lingkaran, elips, hiperbola, atau parabola. Sebagaimana diperlihatkan oleh Gambar 7—1, apabila suatu bidang kerucut dipotong maka dapat dihasilkan empat macam bentuk potongan; tergantung pada posisi pemotongannya : datar, serong, tegaklurus ataukah posisi lain lagi.



Gambar 7-1

Apabila bidang kerucut dipotong dengan posisi mendatar, akan diperoleh potongan berpenampang lingkaran. Pemotongan dengan posisi menyerong menghasilkan potongan berpenampang elips. Pemotongan dengan posisi tegaklurus, tapi bukan pada pertengahan kerucut, menghasilkan penampang hiperbola. Sedangkan jika dipotong menyerong pada separoh bidang kerucut, akan diperoleh potongan berpenampang parabola. Dengan demikian kurva dari sebuah persamaan kuadrat akan berbentuk salah satu dari empat kemungkinan tersebut.

Tiga bentuk yang pertama dari persamaan kuadrat tidak akan dibahas secara panjang lebar di sini, mengingat penerapan langsungnya dalam model-model ekonomi relatif langka. Perhatian lebih ditekankan pada persamaan kuadrat yang berbentuk parabola, yang sangat sering tampil dalam berbagai model ekonomi.

7.1.1 Identifikasi Persamaan Kuadrat

Mengingat pangkat dua dalam suatu persamaan kuadrat sesungguhnya dapat terletak pada baik variabel x maupun variabel y, bahkan pada suku xy (jika ada), maka bentuk yang lebih umum untuk suatu persamaan kuadrat ialah :

$$\boxed{ax^2 + pxy + by^2 + cx + dy + e = 0}$$

(setidak-tidaknya salah satu a atau b tidak sama dengan nol)

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Dari bentuk yang lebih umum ini, dapat diidentifikasi gambar atau kurva dari persamaannya yakni sebagai berikut :

Jika p = 0 dan $a = b \neq 0$, kurvanya sebuah lingkaran
Jika $p^2 - 4ab < 0$, kurvanya sebuah elips
Jika $p^2 - 4ab > 0$, kurvanya sebuah hiperbola
Jika $p^2 - 4ab = 0$, kurvanya sebuah parabola

Apabila $p = 0$, dengan kata lain dalam persamaan kuadrat tersebut tidak terdapat suku yang mengandung xy, bentuk yang lebih umum tadi "berkurang" menjadi :

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0}$$

Berdasarkan bentuk dengan kasus khusus ini, identifikasinya menjadi sebagai berikut :

Jika $a = b \neq 0$, kurvanya sebuah lingkaran
Jika $a \neq b$, tetapi bertanda sama, kurvanya sebuah elips
Jika a dan b berlawanan tanda, kurvanya sebuah hiperbola
Jika $a = 0$ atau $b = 0$, tetapi tidak keduanya, kurvanya sebuah parabola

7.1.2 Lingkaran

Lingkaran — secara geometri — ialah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak tetap terhadap sebuah titik tertentu yang disebut pusat. Jarak titik-titik tersebut terhadap pusat disebut jari-jari lingkaran. Bentuk umum persamaan lingkaran ialah :

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0} \qquad a = b$$

Pusat dan jari-jari lingkaran dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umumnya sedemikian rupa, sehingga pada akhirnya diperoleh bentuk baku rumus lingkaran yaitu :

$$\boxed{(x - i)^2 + (y - j)^2 = r^2}$$

di mana i dan j masing-masing adalah jarak pusat lingkaran terhadap sumbu-vertikal -y dan sumbu-horizontal -x, sedangkan r adalah jari-jari lingkaran.

Persamaan $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ (di mana $a = b$) hanya akan benar-benar menghasilkan sebuah lingkaran apabila, setelah dimanipulasi ke dalam bentuk baku rumus lingkaran, $r^2 > 0$. Jika $r^2 = 0$, tempat kedudukannya akan berupa sebuah titik, atau lingkaran dengan jari-jari sama dengan nol. Sedangkan jika $r^2 < 0$, tempat kedudukannya tidak nyata alias maya, jari-jari lingkarannya khayal; konsekuensinya persamaan di atas tidak dapat disajikan secara grafik.

Titik potong lingkaran dengan sumbu-sumbu koordinat dapat dicari dengan cara memisalkan $x = 0$, sehingga perpotongannya dengan sumbu - y dapat dihitung; kemudian memisalkan $y = 0$, sehingga perpotongannya dengan sumbu -x dapat pula dihitung. Tidak setiap lingkaran mempunyai perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat. Hal ini tergantung pada besar kecilnya nilai-nilai i dan j dibandingkan terhadap nilai r. Jika $i > r$, lingkarannya tidak memotong sumbu-vertikal -y. Jika $j > r$, lingkarannya tidak memotong sumbu-horizontal -x.

Contoh :

1) Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 24x - 18 - 33 = 0$.
Tentukan juga perpotongannya pada masing-masing sumbu koordinat.

$$\underline{3x^2 + 3y^2 - 24x - 18y = 33} \;:3$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 11$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 6y = 11$$
$$x^2 - 8x + k_1 + y^2 - 6y + k_2 = 11 + k_1 + k_2$$
$$(x^2 - 8x + k_1) + (y^2 - 6y + k_2) = 11 + k_1 + k_2$$
$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 11 + 16 + 9$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$i \qquad j \qquad r^2$$

Pusat lingkarannya adalah titik (4, 3), jari-jari = 6.

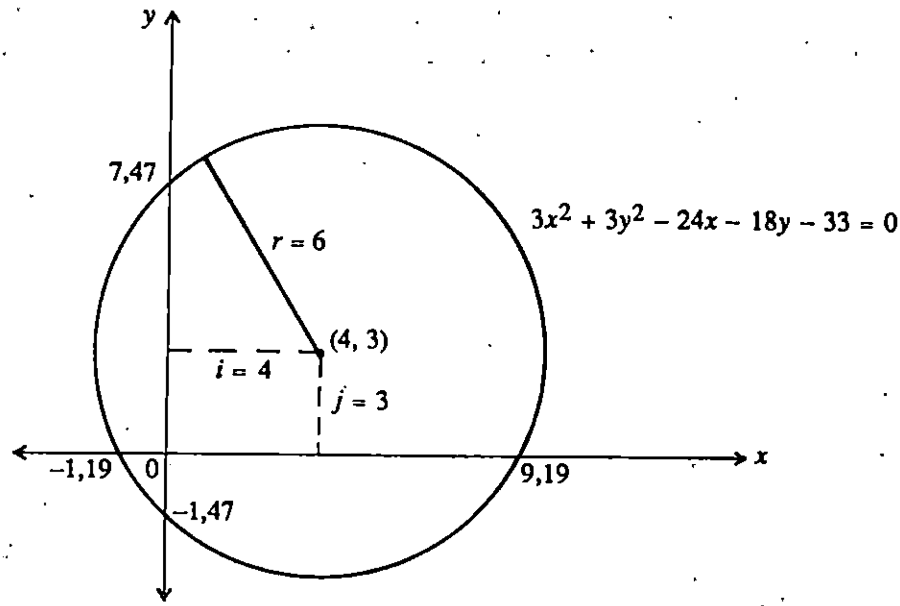
Perpotongan dengan sumbu -x : $y = 0$

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 24x - 33 &= 0 \\ x^2 - 8x - 11 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{dengan rumus } abc \text{ diperoleh} \\ &x_1 = 9{,}19 \text{ dan } x_2 = -1{,}19 \end{aligned}$$

Perpotongan dengan sumbu -y : $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} 3y^2 - 18y - 33 &= 0 \\ y^2 - 6y - 11 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{dengan rumus } abc \text{ diperoleh} \\ &y_1 = 7{,}47 \text{ dan } y_2 = -1{,}47 \end{aligned}$$

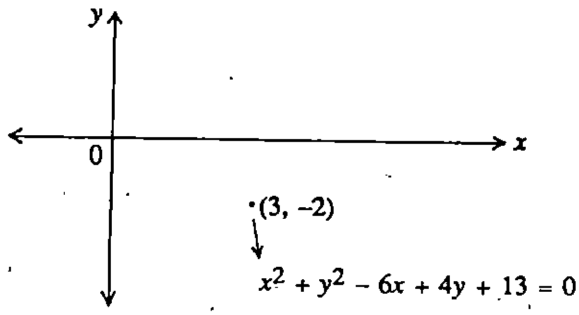
Jadi, lingkaran tersebut memotong sumbu -x pada posisi $x = 9{,}19$ dan $x = -1{,}19$ serta memotong sumbu -y pada kedudukan $y = 7{,}47$ dan $y = -1{,}47$.



Gambar 7 — 2

2) Gambarkan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

$x^2 - 6x + y^2 + 4y = -13$
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -13 + 9 + 4$
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0$
$i = 3, \; j = -2, \; r = 0$



Gambar 7 — 3

Titik pusat lingkaran (i, j) dan jari-jarinya (r) dapat dicari dengan cara yang lebih cepat. Perhatikan penguraian persamaan umum lingkaran dan rumus baku lingkaran masing-masing berikut ini.

Persamaan umum lingkaran :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

$$ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0 \qquad \text{(sebab } a = b\text{)}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Rumus baku lingkaran :

$$(x - i)^2 + (y - j)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ix + i^2 + y^2 - 2jy + j^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ix - 2jy + (i^2 + j^2 - r^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Berdasarkan (I) dan (II) :

$$c/a = -2i \rightarrow i = c/-2a$$

$$d/a = -2j \rightarrow j = d/-2a$$

$$e/a = i^2 + j^2 - r^2 \rightarrow r^2 = i^2 + j^2 - e/a$$

Jadi,

$$\boxed{i = \frac{c}{-2a} \qquad j = \frac{d}{-2a} \qquad r = \sqrt{i^2 + j^2 - \frac{e}{a}}}$$

Dengan memanfaatkan penemuan ini, pusat dan jari-jari lingkaran akan lebih mudah dan cepat diketahui.

7.1.3 Elips

Elips ialah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua fokus selalu konstan. Sebuah elips mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegaklurus; yang panjang disebut sumbu mayor, sedangkan yang pendek disebut sumbu minor. Fokus elips ialah sebarang titik yang terletak pada sumbu elips. Titik potong antara sumbu-sumbu sebuah elips merupakan pusat elips yang bersangkutan.

Bentuk umum persamaan elips :

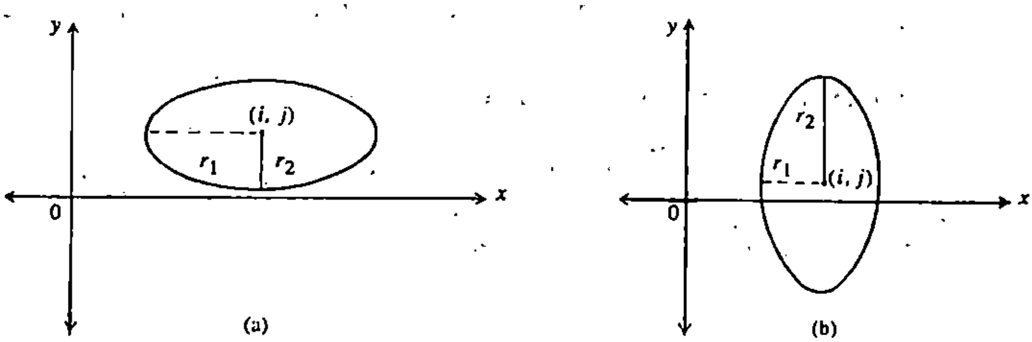
$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0}$$

a setanda tapi tidak sama besar dengan b

Pusat dan jari-jari elips dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umumnya sedemikian rupa, sehingga pada akhirnya diperoleh bentuk baku rumus elips yaitu :

$$\boxed{\frac{(x-i)^2}{r_1^2} + \frac{(y-j)^2}{r_2^2} = 1}$$

di mana i dan j mencerminkan koordinat pusat elips serta r_1 dan r_2 adalah jari-jarinya. Dalam hal $r_1 > r_2$, sumbu mayor elips sejajar dengan sumbu horizontal sistem koordinat, r_1 merupakan jari-jari panjang dan r_2 merupakan jari-jari pendek [Gambar 7-4(a)]. Dalam hal $r_1 < r_2$, sumbu mayor elips sejajar dengan sumbu vertikal sistem koordinat, r_1 merupakan jari-jari pendek dan r_2 merupakan jari-jari panjang [Gambar 7-4(b)]. Patut dicatat bahwa jari-jari panjang = setengah sumbu mayor, sedangkan jari-jari pendek = setengah sumbu minor.



Gambar 7 — 4

Jika $r_1 = r_2$, elips tersebut akan berubah menjadi sebuah lingkaran dengan jari-jari $r = r_1 = r_2$. Jika $(x-i)^2/r_1^2 + (y-j)^2/r_2^2 = 0$, tempat kedudukan (gambar)-nya akan berupa sebuah titik dengan koordinat (i, j). Sedangkan jika $(x-i)^2/r_1^2 + (y-j)^2/r_2^2 < 0$, tempat kedudukannya maya, tidak dapat disajikan secara grafik.

Titik potong elips dengan sumbu-sumbu koordinat dapat dicari dengan cara yang sama seperti halnya dalam kasus lingkaran. Untuk menentukan perpotongan dengan sumbu -x misalkan $y = 0$, dan sebaliknya.

Contoh :

Tentukan pusat dan jari-jari elips $8x^2 + 2y^2 - 32x - 12y + 18 = 0$. Tentukan juga perpotongannya pada masing-masing sumbu koordinat.

$$\underline{8x^2 + 2y^2 - 32x - 12y = -18} \quad : 2$$

$$4x^2 + y^2 - 16x - 6y = -9$$
$$4x^2 - 16x + y^2 - 6y = -9$$
$$4x^2 - 16x + k_1 + y^2 - 6y + k_2 = -9 + k_1 + k_2$$
$$(4x^2 - 16x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = -9 + 16 + 9$$
$$\underline{4(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16} \quad : 16$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

$\left.\begin{matrix} i = 2, & j = 3 \\ r_1 = 2, & r_2 = 4 \end{matrix}\right\}$ Pusat elipsnya adalah titik (2, 3). Karena $r_1 < r_2$, sumbu mayor elips // sumbu-vertikal -y; r_1 = jari-jari pendek dan r_2 = jari-jari panjang.

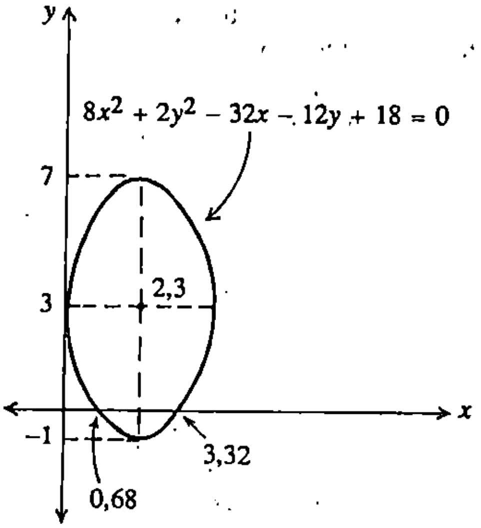
Perpotongan dengan sumbu -x : $y = 0$

$8x^2 - 32x + 18 = 0$

dengan rumus *abc* diperoleh $x_1 = 3{,}32$ dan $x_2 = 0{,}68$

Perpotongan dengan sumbu -y : $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2y^2 - 12y + 18 &= 0 \\ y^2 - 6y + 9 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (y-3)^2 &= 0 \\ y_1 = y_2 &= 3 \end{aligned}$$



Gambar 7-5

Karena $y_1 = y_2$ berarti hanya ada satu nilai y untuk elips ini, yaitu $y = 3$. Sebagaimana dapat dilihat pada gambar di sebelah, elips ini tidak memotong melainkan hanya menyinggung sumbu-vertikal -y, sebab $r_1 = i$. Untuk kasus elips vertikal semacam ini, hanya jika $r_1 > i$ terdapat perpotongannya dengan sumbu -y.

7.1.4 Hiperbola

Hiperbola ialah tempat kedudukan titik-titik yang perbedaan jaraknya terhadap dua fokus selalu konstan. Sebuah hiperbola mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegaklurus dan sepasang asimtot. Perpotongan antara sumbu-sumbu simetri (antara asimtot-asimtot) ini merupakan pusat hiperbola. Sumbu simetri yang memotong hiperbola disebut sumbu lintang (*transverse axis*). Sumbu lintang ini dapat berupa garis yang sejajar dengan sumbu-x atau sejajar dengan sumbu -y, tergantung pada bentuk hiperbolanya.

Bentuk umum persamaan hiperbola :

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0}$$

a berlawanan tanda dengan *b*

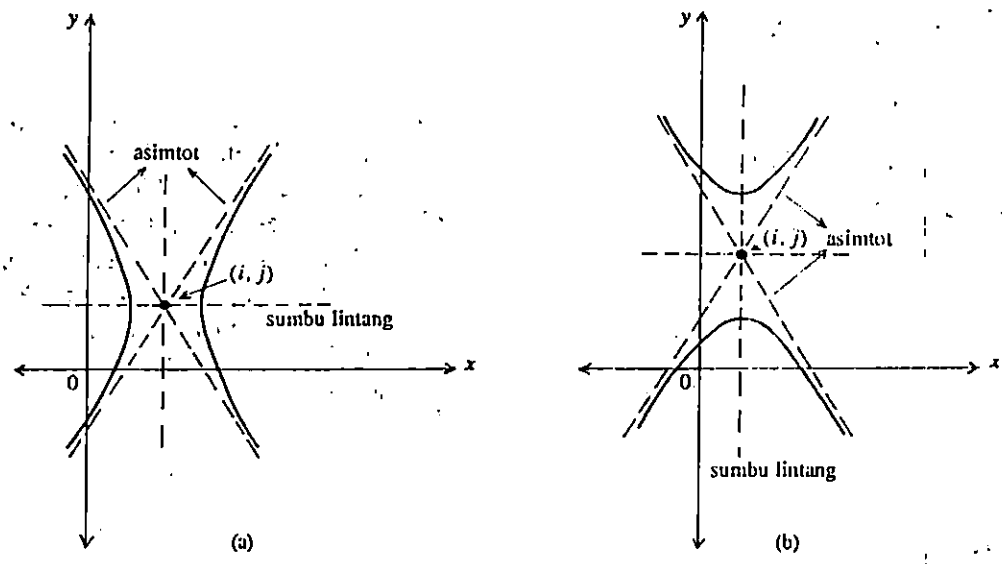
Pusat hiperbola dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umumnya sedemikian rupa, sehingga pada akhirnya diperoleh bentuk baku rumus hiperbola yaitu :

$$\boxed{\frac{(x-i)^2}{m^2} - \frac{(y-j)^2}{n^2} = 1}$$

sumbu lintang // sumbu -x
lihat Gambar 7-6(a)

atau $\boxed{\dfrac{(y-j)^2}{n^2} - \dfrac{(x-i)^2}{m^2} = 1}$ sumbu lintang // sumbu -y lihat Gambar 7-6(b)

di mana (i, j) adalah koordinat titik pusat hiperbolanya.

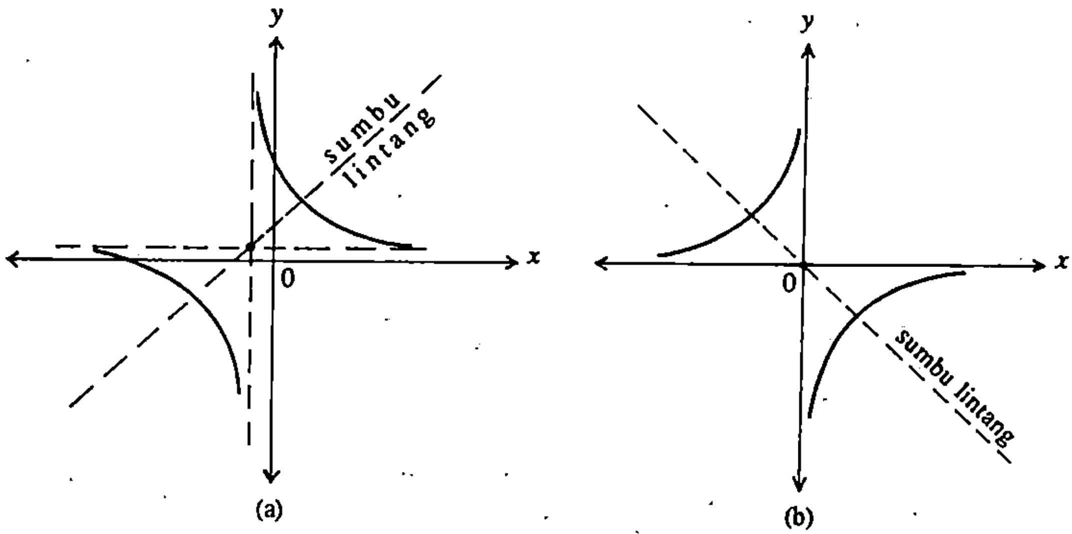


Gambar 7— 6

Persamaan untuk asimtot-asimtotnya dapat dicari melalui bentuk rumus baku di atas, yaitu :

$$\boxed{\frac{x-i}{m} = \pm\frac{y-j}{n}} \quad \text{atau} \quad \boxed{\frac{y-j}{n} = \pm\frac{x-i}{m}}$$

Dalam hal $m = n$, asimtot-asimtotnya akan saling tegak-lurus, sumbu lintangnya tidak lagi sejajar dengan salah satu sumbu koordinat, hiperbolanya disebut hiperbola samasisi (*equilateral hyperbola*). Contoh hiperbola samasisi, dengan kata lain hiperbola yang asimtot-asimtotnya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, diperlihatkan oleh gambar berikut.



Gambar 7 — 7

Hiperbola samasisi pada Gambar 7-7(b) merupakan hiperbola samasisi khusus; asimtot-asimtotnya berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat sehingga titik pangkal O (0,0) merupakan pusat hiperbolanya. Hiperbola samasisi semacam ini dikenal dengan sebutan hiperbola *Fermat.*

Contoh :

Tentukan pusat dan asimtot-asimtot dari hiperbola $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0$. Tentukan juga perpotongannya pada masing-masing sumbu koordinat.

$$16x^2 - 64x - 9y^2 + 18y = 89$$
$$16x^2 - 64x + 64 - 9y^2 + 18y - 9 = 89 + 64 - 9$$
$$16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = 144$$
$$16(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 144 \quad : 144$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{4^2} = 1 \rightarrow i = 2, \quad j = 1$$

$$m = 3, \quad n = 4$$

Pusat hiperbolanya adalah titik (2, 1). Karena persamaannya memenuhi rumus baku $(x-i)^2/m^2 - (y-j)^2/n^2 = 1$, berarti sumbu lintangnya sejajar dengan sumbu -x.

Asimtot-asimtotnya :

$$\frac{x-i}{m} = \pm \frac{y-j}{n} \rightarrow \frac{x-2}{3} = \pm \frac{y-1}{4}$$

$$y-1 = \pm \frac{4}{3}(x-2)$$

$$y = \pm \frac{4}{3}(x-2) + 1$$

$y_1 = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ $\qquad$ $y_2 = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$

Jika $x = 0$, $y = -1,67$ $\qquad$ Jika $x = 0$, $y = 3,67$

Jika $y = 0$, $x = 1,25$ $\qquad$ Jika $y = 0$, $x = 2,75$

Perpotongan dengan sumbu -x : $y = 0$

$16x^2 - 64x - 89 = 0$, diperoleh $x_1 = 5,09$ dan $x_2 = -1,09$.

Perpotongan dengan sumbu -y : $x = 0$

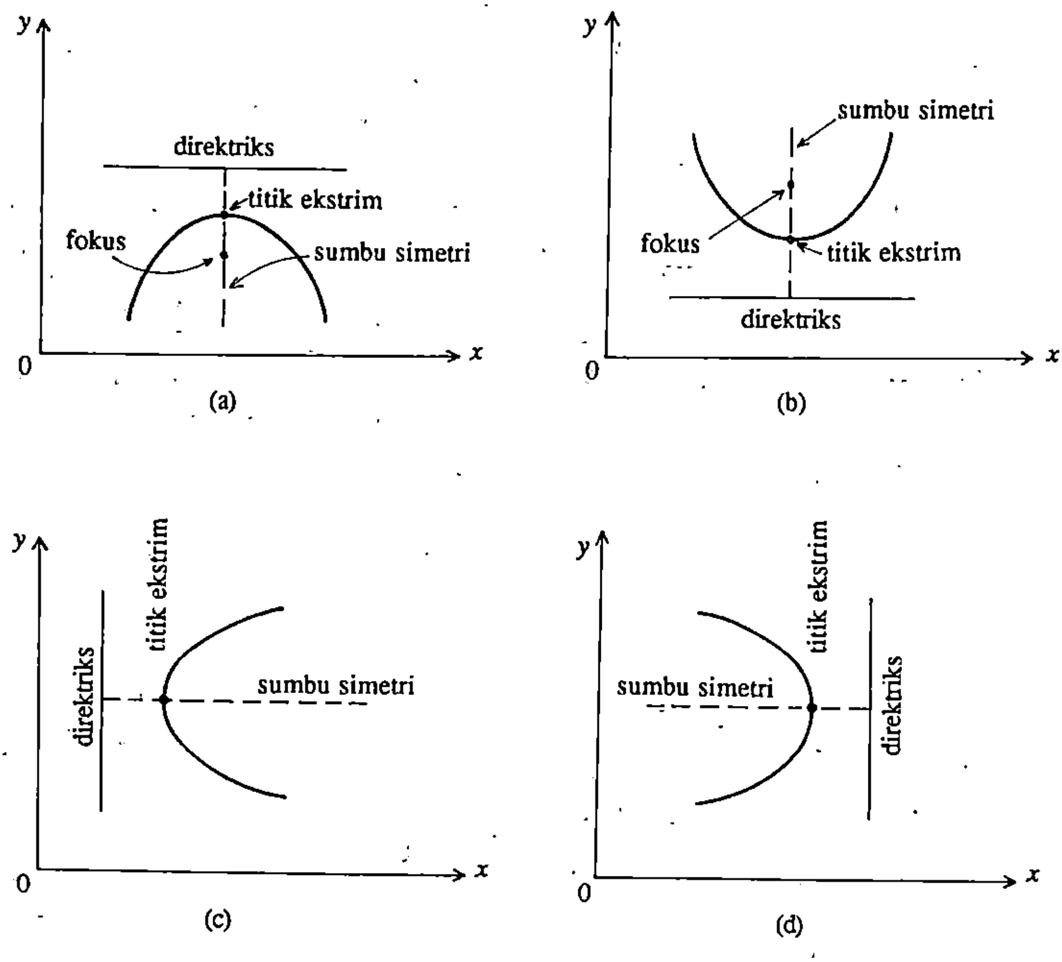
$9y^2 - 18y + 89 = 0$, diperoleh $y_1 = y_2$ = bilangan khayal.
Tidak terdapat perpotongan dengan sumbu -y.

Gambar hiperbolanya sengaja tidak disajikan di sini. Penulis serahkan pada pembaca untuk mencoba sendiri menggambarkannya. Pertama-tama tentukan koordinat titik pusatnya, lalu tarik asimtot-asimtotnya dan sumbu lintangnya, kemudian tentukan titikpotong-titikpotongnya pada masing-masing sumbu koordinat. Berdasarkan data ini anda dapat menggambarkan hiperbola yang bersangkutan. Untuk mengetahui kebenaran pekerjaan, anda dapat mengujinya melalui perpotongan antarasimtot. Jika titik potong asimtot-asimtot sama dengan koordinat titik pusat hiperbola, berarti pekerjaan hitung-hitungan anda benar. Jika tidak sama, berarti pekerjaan anda salah. Selamat mencoba !

7.1.5 Parabola

Kini tiba saatnya kita membicarakan bentuk persamaan kuadrat yang paling penting dalam penerapan bisnis dan ekonomi, yakni parabola. Parabola ialah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direktriks. Setiap parabola mempunyai sebuah sumbu simetri dan sebuah titik ekstrim. Sumbu simetri parabola dapat berupa garis yang sejajar dengan sumbu-vertikal-y atau berupa garis yang sejajar dengan sumbu-horizontal-x. Titik ekstrim parabola tak lain adalah titik potong antara sumbu simetri dan parabola yang bersangkutan.

Letak titik ekstrim parabola mengandung empat kemungkinan, tergantung pada bentuk parabolanya. Apabila sumbu simetri parabola sejajar dengan sumbu vertikal, letak titik ekstrimnya akan di atas jika parabolanya terbuka ke bawah, atau di bawah jika parabolanya terbuka ke atas. Sedangkan bila sumbu simetri parabola sejajar dengan sumbu horizontal, titik ekstrimnya akan terletak di kiri jika parabolanya terbuka ke kanan, atau di kanan jika parabolanya terbuka ke kiri. Perhatikan gambar parabola-parabola berikut.



Gambar 7 — 8

Secara umum persamaan sebuah parabola dapat dituliskan sebagai $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, di mana salah satu a atau b (tetapi tidak keduanya !) sama dengan nol. Mengingat terdapat parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu vertikal, dan parabola dengan sumbu simetri sejajar sumbu horizontal, maka terdapat dua macam bentuk umum yang lebih definitif untuk persamaan suatu parabola. Dengan demikian, bentuk umum persamaan parabola adalah :

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$ sumbu simetri // sumbu vertikal

atau

$$\boxed{x = ay^2 + by + c}$$ sumbu simetri // sumbu horizontal

di mana $a \neq 0$

Untuk parabola dengan sumbu simetri // sumbu vertikal atau $y = ax^2 + bx + c$, parabolanya terbuka ke bawah jika $a < 0$ dan terbuka ke atas jika $a > 0$. Sedangkan untuk parabola dengan sumbu simetri // sumbu horizontal atau $x = ay^2 + by + c$, parabolanya terbuka ke kanan jika $a > 0$ dan terbuka ke kiri jika $a < 0$. Mengingat bentuk parabola ~~yang umum~~nya diterapkan ~~dalam bisnis dan e~~konomi adalah parabola jenis yang pertama ($y = ax^2 + bx + c$), buku ini lebih mencurahkan perhatian pada parabola jenis tersebut.

Titik ekstrim parabola (i, j) adalah :

$$\boxed{\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)}$$

di mana $-b/2a$ adalah jarak titik ekstrim dari sumbu-vertikal $-y$, sedangkan $(b^2 - 4ac)/ - 4a$ adalah jarak titik ekstrim dari sumbu-horizontal $-x$. Titik potong parabola dengan sumbu-sumbu koordinat dapat dicari dengan cara serupa seperti halnya dalam kasus lingkaran, elips dan hiperbola.

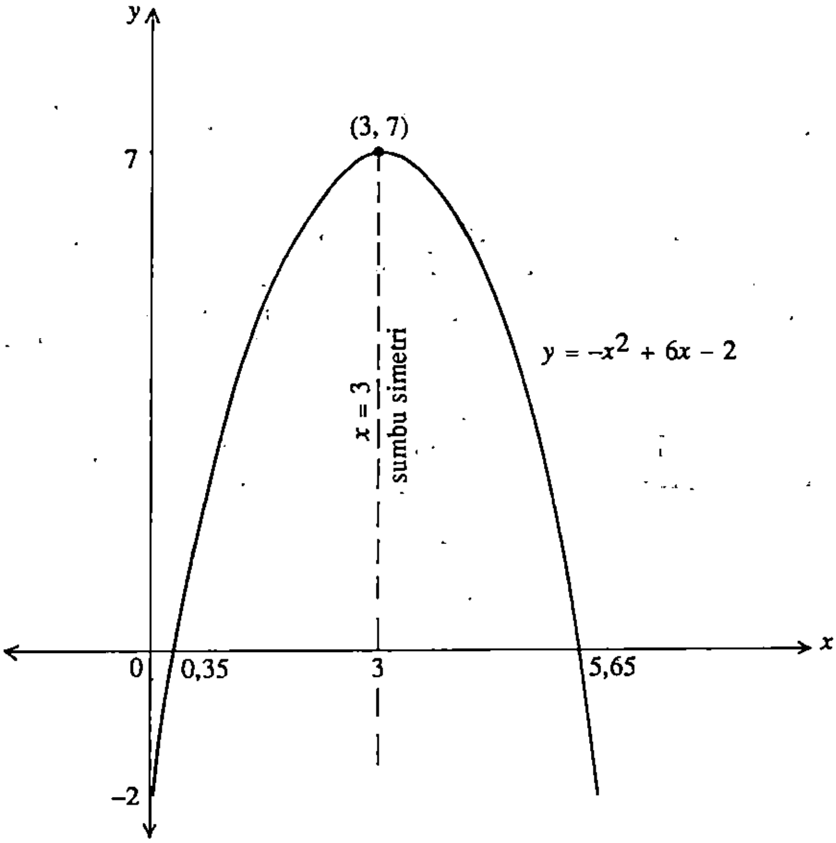
Contoh :

1) Tentukan titik ekstrim parabola $y = -x^2 + 6x - 2$ dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

$y = -x^2 + 6x - 2$; parabolanya terbuka ke bawah karena $a = -1 < 0$, titik ekstrimnya terletak di atas, berupa titik puncak. Koordinat titik puncak :

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right) = \left(\frac{-6}{-2}, \frac{36 - 8}{4}\right) = (3, \quad 7)$$

Perpotongan dengan sumbu -y : $x = 0 \rightarrow y = -2$
Perpotongan dengan sumbu -x : $y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 2 = 0$
diperoleh $x_1 = 5{,}65$; $x_2 = 0{,}35$



Gambar 7 — 9

2) Tentukan titik ekstrim parabola $y = 2x^2 - 8x + 5$ dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

$y = 2x^2 - 8x + 5$; parabolanya terbuka ke atas sebab $a = 2 > 0$, titik ekstrimnya terletak di bawah, berupa titik nadir. Koordinat titik ekstrimnya :

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right) = \left(\frac{8}{4}, \frac{64 - 40}{8} \right) = (2, \ 3)$$

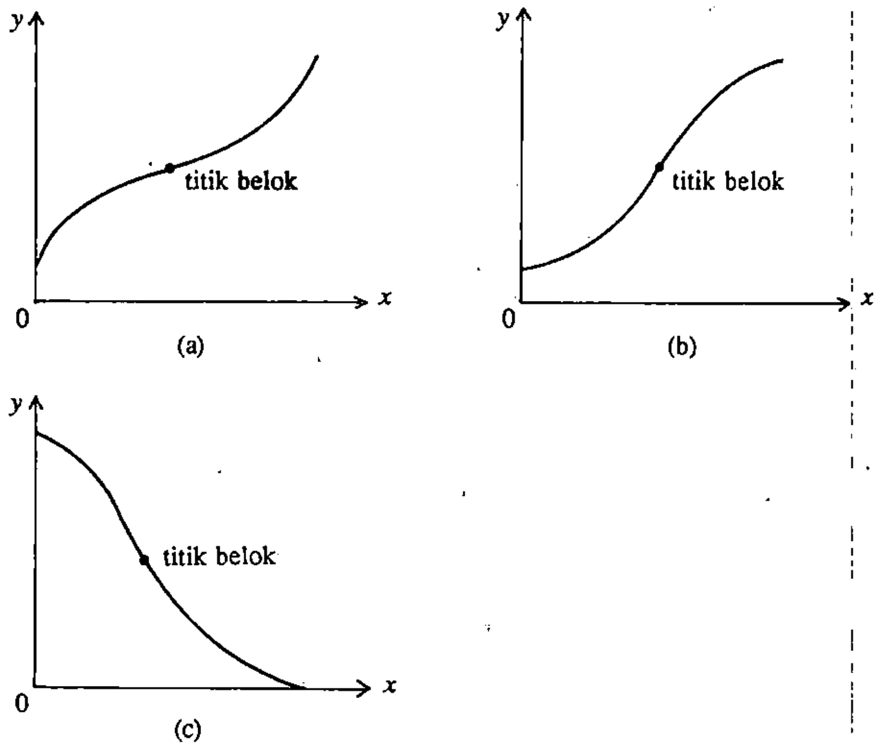
Untuk $x = 0$, $y = 5$ (perpotongan dengan sumbu vertikal)
Untuk $y = 0$, $2x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 3{,}225$ dan $x_2 = 0{,}775$.

7.2 FUNGSI KUBIK

Fungsi kubik atau fungsi berderajat tiga ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat tiga. Bentuk umum persamaan fungsi kubik :

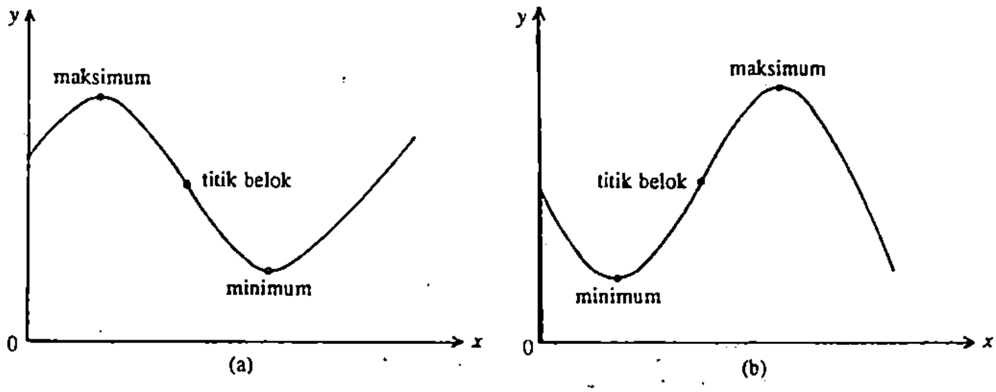
$$\boxed{y = a + bx + cx^2 + dx^3} \qquad d \neq 0$$

Setiap fungsi kubik setidak-tidaknya mempunyai sebuah titik belok (*inflexion point*), yaitu titik peralihan bentuk kurva dari cekung menjadi cembung atau dari cembung menjadi cekung. Selain titik belok, sebuah fungsi kubik mungkin pula mempunyai satu titik ekstrim (maksimum atau minimum) atau dua titik ekstrim (maksimum dan minimum). Ada tidaknya titik ekstrim dalam suatu fungsi kubik tergantung pada besarnya nilai-nilai *b*, *c* dan *d* di dalam persamaannya. Dengan demikian terdapat beberapa kemungkinan mengenai bentuk kurva suatu fungsi kubik. Kemungkinan-kemungkinan tersebut diperlihatkan oleh gambar-gambar berikut.



Gambar 7–10

Gambar-gambar di atas memperlihatkan fungsi-fungsi kubik yang hanya mempunyai titik belok, tanpa titik ekstrim. Gambar 7—11 di bawah memperlihatkan fungsi-fungsi kubik yang mempunyai titik ekstrim.



Gambar 7 — 11

Cara mencari koordinat-koordinat titik maksimum dan titik minimum serta titik belok dari suatu fungsi kubik akan diterangkan tersendiri pada bab tentang diferensial (Bab 9, lihat Seksi 9.5.3.).

Latihan Fungsi Non-Linear

1. Hitunglah harga-harga y dari persamaan-persamaan berikut :
   (a) $y = 32 - 4x + x^2$ untuk $x = 3$
   (b) $y = 20 - 5x - 3x^2 + x^3$ untuk $x = -2$
   (c) $3y = 27 + x - x^2$ untuk $x = 6$
   (d) $\sqrt{y} = 6 - 6x + 2x\sqrt{x}$ untuk $x = 9$

2. Hitunglah harga-harga x dari persamaan-persamaan berikut :
   (a) $x^2 - 8x + 16 = 0$
   (b) $3x^2 - 12x + 9 = 0$
   (c) $3x\sqrt{x} - 81 = 0$
   (d) $\frac{1}{4}x^3 - 16 = 0$

3. Tentukan titik potong dari pasangan persamaan-persamaan berikut :
   (a) $y = 39 - 3x^2$ dan $y = (x + 2)^2$
   (b) $y = -3x^2 + 48$ dan $y = x^2 + 4x$
   (c) $y = -2x^2 - 8x + 64$ dan $y = 5x^2 + 10x$
   (d) $x = -2y^2 - 8y + 96$ dan $x = 4y^2 + 10y$

4. Jelaskan bagaimana bentuk kurva dari persamaan-persamaan kuadrat berikut (lingkaran, elips, hiperbola ataukah parabola) :
   (a) $x^2 - 3y^2 - 2x + 2y + 9 = 0$
   (b) $x^2 + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$
   (c) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 9 = 0$
   (d) $2x^2 + 2x - 2y + 9 = 0$

5. Bagaimana pula bentuk kurva dari persamaan-persamaan di bawah ini ?
   (a) $x^2 - 5x - y = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 25 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 = 0$
   (d) $x^2 + 3y^2 = 0$

6. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran :
   (a) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 4y - 38 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$
   (c) $-3x^2 - 3y^2 - 24x + 12y - 60 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 + 8x - my + 16 = 0$, di mana $m = 0$

7. Tentukan pusat serta jari-jari panjang dan jari-jari pendek elips :
   (a) $x^2 + 4y^2 = 100$
   (b) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$
   (c) $x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 4 = 0$
   (d) $x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 32 = 0$

8. Tentukan pusat dan asimtot-asimtot hiperbola :
   (a) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$
   (b) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y - 31 = 0$
   (c) $-9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y - 36 = 0$
   (d) $x^2 - y^2 - 4 = 0$

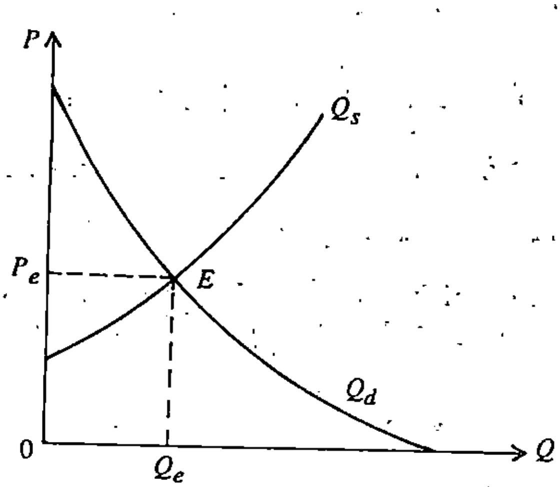
9. Tentukan titik ekstrim dan keterbukaan parabola :
   (a) $y = 3x^2 - 30x + 77$
   (b) $y = -5x^2 + 30x - 35$
   (c) $x = y^2 - 12y + 38$
   (d) $x = -2y^2 + 24y - 60$

10. Tentukan titik potong antara parabola $y = x^2 - 4x + 3$ dan parabola $y = -x^2 + 4x - 3$.

7.3 PENERAPAN EKONOMI

7.3.1 Permintaan, Penawaran dan Keseimbangan Pasar

Selain berbentuk fungsi linear, permintaan dan penawaran dapat pula berbentuk fungsi non-linear. Fungsi permintaan dan fungsi penawaran yang kuadratik dapat berupa potongan lingkaran, potongan elips, potongan hiperbola maupun potongan parabola. Cara menganalisis keseimbangan pasar untuk permintaan dan penawaran yang non-linear sama seperti halnya dalam kasus yang linear. Keseimbangan pasar ditunjukkan oleh kesamaan $Q_d = Q_s$ pada perpotongan antara kurva permintaan dan kurva penawaran.



Keseimbangan pasar

$$\boxed{Q_d = Q_s}$$

Q_d : jumlah permintaan
Q_s : jumlah penawaran
E : titik keseimbangan
P_e : harga keseimbangan
Q_e : jumlah keseimbangan

Gambar 7–12

Analisis pengaruh pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar juga sama seperti pada kondisi linear. Pajak atau subsidi menyebabkan harga jual yang ditawarkan oleh produsen berubah, tercermin oleh berubahnya persamaan penawaran, sehingga harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar pun berubah. Pajak menyebabkan harga keseimbangan menjadi lebih tinggi dan jumlah keseimbangan menjadi lebih sedikit. Sebaliknya, subsidi menyebabkan harga keseimbangan menjadi lebih rendah dan jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak.

Kasus 23

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 19 - P^2$ sedangkan penawarannya $Q_s = -8 + 2P^2$. **Berapa harga keseimbangan** dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar ?

Keseimbangan pasar : $Q_d = Q_s$

$19 - P^2 = -8 + 2P^2$

$27 = 3P^2, \quad P^2 = 9, \quad P = 3$

$Q = 19 - P^2 = 19 - 3^2 = 10$

Jadi, $P_e = 3$ dan $Q_e = 10$

Jika misalnya terhadap barang yang bersangkutan dikenakan pajak spesifik sebesar 1 (rupiah) per unit, maka persamaan penawaran sesudah pengenaan pajak menjadi :

$$Q'_s = -8 + 2(P-1)^2 = -8 + 2(P^2 - 2P + 1) = -6 - 4P + 2P^2$$

Keseimbangan pasar yang baru : $Q_d = Q'_s$

$19 - P^2 = -6 - 4P + 2P^2$

$3P^2 - 4P - 25 = 0$

dengan rumus *abc* diperoleh $P_1 = 3{,}63$ dan $P_2 = -2{,}30$. P_2 tidak dipakai karena harga negatif adalah irrasional.

Dengan memasukkan $P = 3{,}63$ ke dalam persamaan Q_d atau persamaan Q'_s diperoleh $Q = 5{,}82$.

Jadi, dengan adanya pajak : $P'_e = 3{,}63$ dan $Q'_e = 5{,}82$.

Selanjutnya dapat dihitung beban pajak yang menjadi tanggungan konsumen dan produsen per unit barang, serta jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah, masing-masing :

$tk = P'_e - P_e = 3{,}63 - 3 = 0{,}63$

$tp = t - tk = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$

$T = Q'_e \times t = 5{,}82 \times 1 = 5{,}82.$

7.3.2 Fungsi Biaya

Selain pengertian biaya tetap, biaya variabel dan biaya total, dalam konsep biaya dikenal pula pengertian biaya rata-rata (*average cost*) dan biaya marjinal (*marginal cost*). Biaya rata-rata ialah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran, merupakan hasilbagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Adapun biaya marjinal ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

Biaya tetap	: $FC = k$ (k : konstanta)
Biaya variabel	: $VC = f(Q)$
Biaya total	: $C = FC + VC = k + f(Q) = c(Q)$
Biaya tetap rata-rata	: $AFC = \dfrac{FC}{Q}$
Biaya variabel rata-rata	: $AVC = \dfrac{VC}{Q}$
Biaya rata-rata	: $AC = \dfrac{C}{Q} = AFC + AVC$
Biaya marjinal	: $MC = \dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$

Dalam buku ini setiap perkataan 'biaya tetap' dan 'biaya variabel' maksudnya adalah 'biaya tetap total' dan 'biaya variabel total'. Begitu pula setiap perkataan 'biaya' maksudnya adalah 'biaya total'. Dengan demikian setiap penulisan *FC*, *VC* dan *C* (di buku ini) sama maknanya dengan *TFC*, *TVC* dan *TC* (di buku-buku lain). Untuk menyatakan rata-rata senantiasa dicantumkan inisial *A* (*average* = rata-rata) seperti *AFC*, *AVC* dan *AC*. Sedangkan untuk menyatakan marjinal, buku ini senantiasa akan mencantumkan inisial *M* (*marginal* = marjinal), misalnya *MC*.

Bentuk non-linear dari fungsi biaya pada umumnya berupa fungsi kuadrat parabolik dan fungsi kubik. Hubungan antara biaya total dan bagian-bagiannya secara grafik dapat dilihat sebagai berikut :

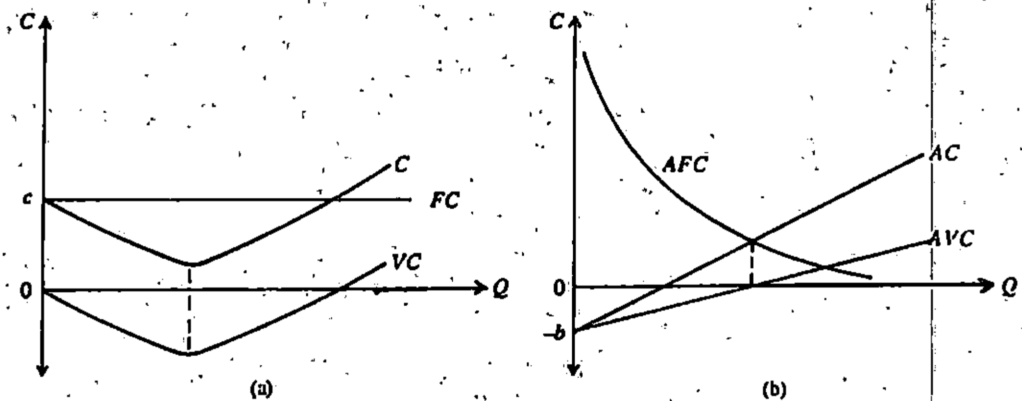
(a) Biaya total merupakan fungsi kuadrat parabolik

Andaikan $C = \underbrace{aQ^2 - bQ}_{VC} + \underbrace{c}_{FC}$

maka :

$$AC = C/Q = aQ - b + c/Q$$
$$AVC = VC/Q = aQ - b$$
$$AFC = FC/Q = c/Q$$

Perhatikan bahwa baik biaya total (C) maupun biaya variabel (VC) sama-sama berbentuk parabola. Perbedaan antara keduanya terletak pada konstanta c, yang mencerminkan biaya tetap (FC). Secara grafik, kurva C dan kurva VC adalah sebangun, dengan perbedaan sejarak c.



Gambar 7—13

Karena C dan VC berbentuk parabola maka, dengan memanfaatkan rumus titik ekstrim parabola, dapat dihitung tingkat produksi (Q) pada C minimum dan VC minimum serta besarnya C minimum dan VC minimumnya. C dan VC yang berbentuk parabola membawa konsekuensi AC dan AVC berbentuk linear; sementara AFC asimtotik terhadap kedua sumbu C dan sumbu Q, sebab FC linear. Perhatikan Gambar 7—13(a), C minimum dan VC minimum terjadi pada posisi Q yang sama, tetapi C minimum itu sendiri tidak sama dengan VC minimum. Hanya jika $FC \equiv c = 0$ maka C minimum = VC minimum. Selanjutnya perhatikan Gambar 7—13(b), $AC = AFC$ pada posisi Q di mana $AVC = 0$

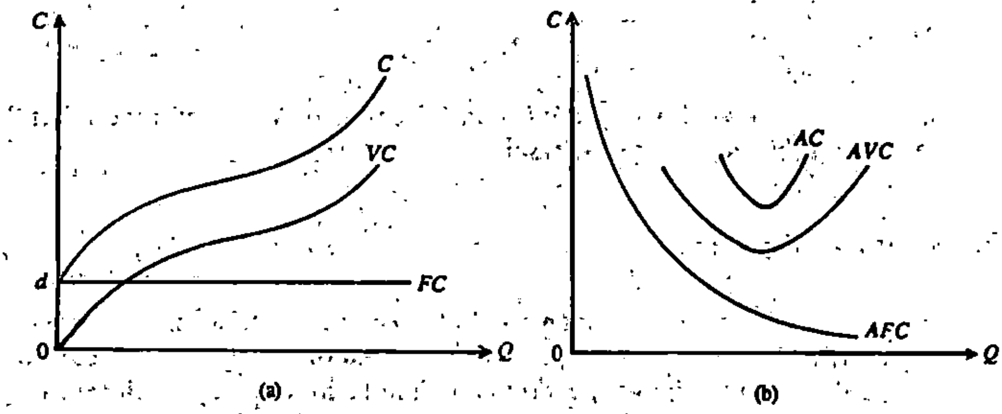
(b) Biaya total merupakan fungsi kubik

Andaikan $C = \underbrace{aQ^3 - bQ^2 + cQ}_{VC} + \underset{FC}{\underset{\downarrow}{d}}$

maka :

$$AC = c/Q = aQ^2 - bQ + c + d/Q$$
$$AVC = VC/Q = aQ^2 - bQ + c$$
$$AFC = FC/Q = d/Q$$

Biaya total berfungsi kubik seperti di atas selalu membuahkan AC dan AVC berbentuk parabola terbuka ke atas. Sedangkan AFC tetap asimtotik terhadap sumbu C dan sumbu Q, sebab FC selalu berupa konstanta yang kurvanya sejajar sumbu Q. Perhatikan Gambar 7—14(b), AC minimum dan AVC minimum juga terjadi pada kedudukan Q yang sama, perbedaan di antara keduanya adalah sebesar AFC.



Gambar 7—14

Kasus 24

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 2Q^2 - 24Q + 102$. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total ini minimum ? Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut. Hitung pula besarnya biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variabel rata-rata pada tingkat produksi tadi. Seandainya dari kedudukan ini produksi dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal ?

Berdasarkan rumus titik ekstrim parabola, C minimum terjadi pada

kedudukan $Q = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{24}{4} = 6$ unit

Besarnya C minimum $= 2Q^2 - 24Q + 102$
$= 2(6)^2 - 24(6) + 102 = 30$

[C minimum dapat juga dicari dengan rumus ordinat titik ekstrim parabola, yaitu $(b^2 - 4ac)/-4a$; hasilnya C minimum $= (24^2 - 4 \times 2 \times 102)/-4 \times 2 = -240/-8 = 30$, tidak berbeda].

Selanjutnya, pada $Q = 6$ ini :

$FC = 102$

$VC = 2Q^2 - 24Q = 2(6)^2 - 24(6) = -72$

$$AC = C/Q = 30/6 = 5$$
$$AFC = FC/Q = 102/6 = 17$$
$$AVC = VC/Q = -72/6 = -12$$

Jika $Q = 7$, $C = 2(7)^2 - 24(7) + 102 = 32$

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{32 - 30}{7 - 6} = 2$$

Berarti untuk menaikkan produksi dari 6 unit menjadi 7 unit diperlukan biaya tambahan (biaya marjinal) sebesar 2.

7.3.3 Fungsi Penerimaan

Bentuk fungsi penerimaan total (*total revenue, R*) yang non-linear pada umumnya berupa sebuah persamaan parabola terbuka ke bawah. Ini merupakan bentuk fungsi penerimaan yang lazim dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar monopoli. Sedangkan fungsi penerimaan total yang linear, sebagaimana dikenalkan pada Seksi 6.5.6 di depan, merupakan fungsi penerimaan yang dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar persaingan sempurna.

Penerimaan total merupakan fungsi dari jumlah barang, juga merupakan hasilkali jumlah barang dengan harga barang per unit. Seperti halnya dalam konsep biaya, dalam konsep penerimaan pun dikenal pengertian rata-rata dan marjinal. Penerimaan rata-rata (*average revenue, AR*) ialah penerimaan yang diperoleh per unit barang, merupakan hasilbagi penerimaan total terhadap jumlah barang. Penerimaan marjinal (*marginal revenue, MR*) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

Penerimaan total	: $R = Q \times P = f(Q)$
Penerimaan rata-rata	: $AR = \dfrac{R}{Q}$
Penerimaan marjinal	: $MR = \dfrac{\Delta R}{\Delta Q}$

Mengingat $R = Q \times P$ atau $P = R/Q$, sedangkan $AR = R/Q$, berarti penerimaan rata-rata (AR) tak lain adalah harga barang per unit (P). Secara grafik, kurva AR adalah juga kurva permintaan dalam bentuk $P = g(Q)$.

Kasus 25

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh $P = 900 - 1{,}5\ Q$. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya ? Berapa besarnya penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jual per unit ? Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan total maksimum tersebut.

$P = 900 - 1{,}5\ Q \rightarrow R = Q \times P = 900\ Q - 1{,}5\ Q^2$

Jika $Q = 200$, $R = 900(200) - 1{,}5(200)^2 = 120.000$

$P = 900 - 1{,}5(200) = 600$

atau $P = R/Q = 120.000/200 = 600$

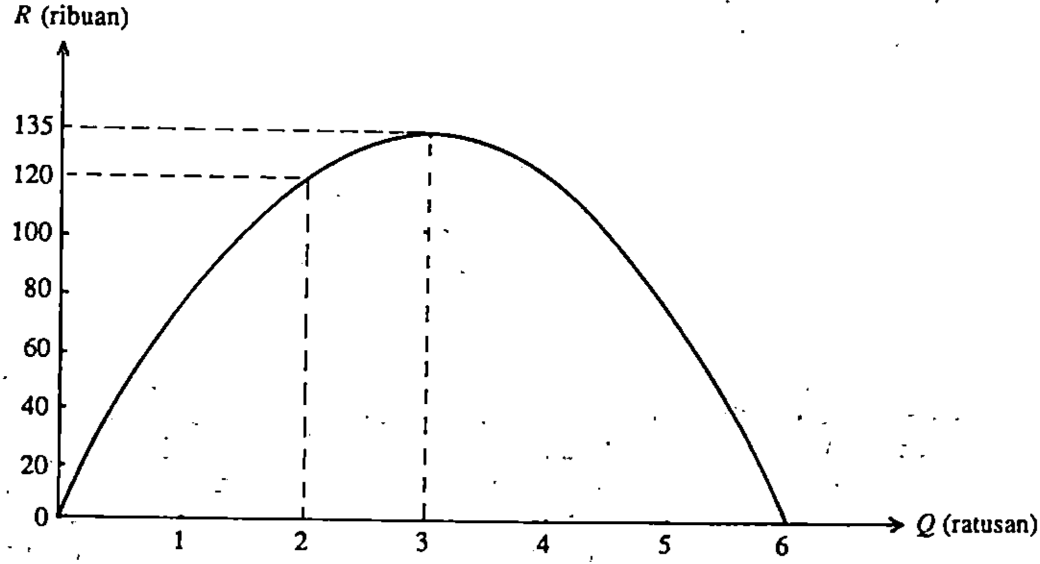
Jika $Q = 250$, $R = 900(250) - 1{,}5(250)^2 = 131.250$

$$MR = \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{131.250 - 120.000}{250 - 200} = 225$$

$R = -1{,}5\ Q^2 + 900\ Q$

R maksimum pada $Q = -b/2\,a = -900/-3 = 300$

Besarnya R maksimum $= -1{,}5(300)^2 + 900(300) = 135.000$

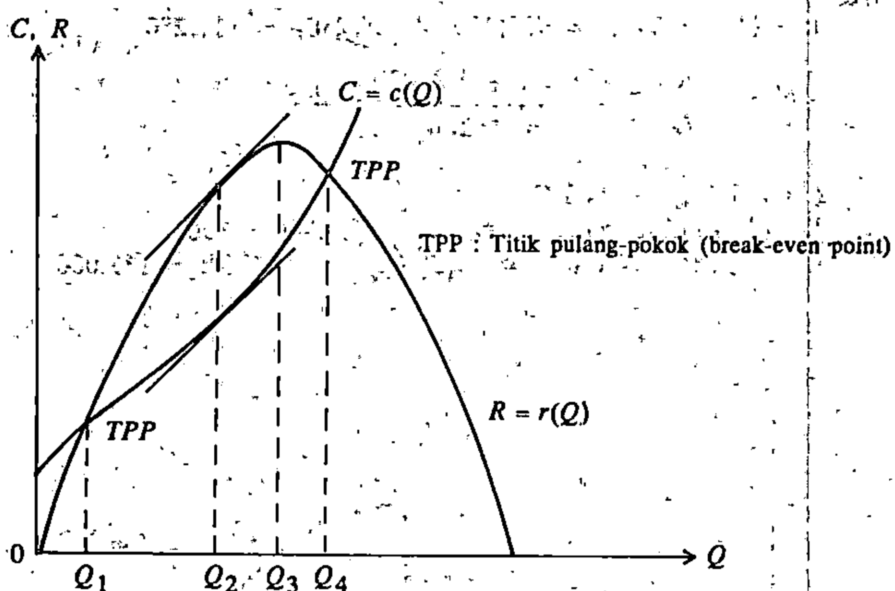


Gambar 7—15

Dalam membentuk fungsi penerimaan melalui fungsi permintaan, persamaan permintaannya harus dalam bentuk $P = f(Q)$. Jika persamaan permintaan berbentuk $Q = f(P)$ maka harus dibalik dulu menjadi bentuk $P = f(Q)$, mengingat penerimaan merupakan fungsi dari jumlah barang [$R = r(Q)$] dan bukan fungsi dari harga [bukan $R = r(P)$].

7.3.4 Keuntungan, Kerugian dan Pulang-Pokok

Tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan, kerugian dan keadaan pulang-pokok secara grafik dapat dilihat sebagai berikut :



Gambar 7—16

Tingkat produksi Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan pulang pokok, sebab penerimaan total sama dengan pengeluaran (biaya) total, $R = C$. Area di sebelah kiri Q_1 dan di sebelah kanan Q_4 mencerminkan keadaan rugi, sebab penerimaan total lebih kecil daripada pengeluaran total, $R < C$. Sedangkan area di antara Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan untung, sebab penerimaan total lebih besar daripada pengeluaran total, $R > C$. Tingkat produksi Q_3 mencerminkan tingkat produksi yang memberikan penerimaan total maksimum.

Besar kecilnya keuntungan dicerminkan oleh besar kecilnya selisih positif antara R dan C. Secara grafik, hal ini ditunjukkan oleh jarak antara kurva R dan kurva C. Semakin lebar jarak positif tersebut semakin besar keuntungan yang diperoleh. Jarak positif terlebar antara kurva R dan kurva C terjadi pada posisi di mana lereng (*slope*) dari kedua kurva itu sama besar, dan ini mencerminkan keuntungan terbesar atau maksimum. Dalam Gambar 7-16 di atas, hal ini terjadi pada kedudukan Q_2; lereng kurva R dan kurva C pada tingkat produksi ini sama besar (perhatikan : garis-garis singgung yang ditarik pada kedua kurva tersebut sejajar).

Satu hal yang penting dicatat ialah bahwa jarak positif terlebar antara kurva R dan kurva C tidak selalu terjadi pada saat kurva R mencapai maksimum, juga tidak mesti terjadi pada saat kurva C mencapai minimum. Dalam gambar di atas, R mencapai maksimum pada Q_3,sedangkan jarak positif terlebar antara R dan C terjadi pada Q_2. Ini berarti keuntungan maksimum tidak selalu terjadi pada saat R maksimum atau C minimum. Dengan perkataan lain, R maksimum atau C minimum tidak selalu menghasilkan keuntungan maksimum.

Kasus 26

Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $R = -0{,}10\,Q^2 + 20\,Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan $C = 0{,}25\,Q^3 - 3\,Q^2 + 7\,Q + 20$. Hitunglah profit perusahaan ini jika dihasil kan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit.

$$\pi = R - C = -0{,}10\,Q^2 + 20\,Q - 0{,}25\,Q^3 + 3\,Q^2 - 7\,Q - 20$$
$$\pi = -0{,}25\,Q^3 + 2{,}90\,Q^2 + 13\,Q - 20$$

$$Q = 10 \rightarrow \pi = -0{,}25(1000) + 2{,}90(100) + 13(10) - 20$$
$$= -250 + 290 + 130 - 20 = 150 \text{ (keuntungan)}$$

$$Q = 20 \rightarrow \pi = -0{,}25(8000) + 2{,}90(400) + 13(20) - 20$$
$$= -2000 + 1160 + 260 - 20 = -600 \text{ (kerugian).}$$

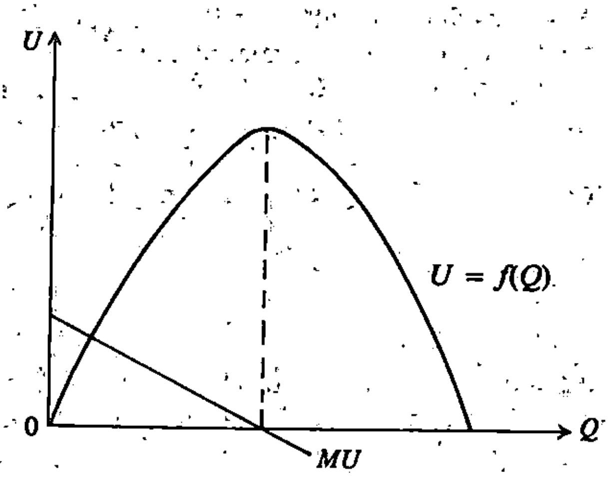
7.3.5 Fungsi Utilitas *)

Fungsi utilitas menjelaskan besarnya utilitas (kepuasan, kegunaan) yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsikan suatu barang atau jasa. Pada umumnya semakin banyak jumlah suatu barang dikonsumsi semakin besar

*) Istilah utilitas di sini merupakan serapan dari kata "utility" dalam bahasa Inggris, yang dapat berarti kepuasan atau kegunaan.

utilitas yang diperoleh, kemudian mencapai puncaknya (titik jenuh) pada jumlah konsumsi tertentu, sesudah itu justru menjadi berkurang atau bahkan negatif bila jumlah barang yang dikonsumsi terus menerus ditambah.

Utilitas total merupakan fungsi dari jumlah barang yang dikonsumsi. Persamaan utilitas total (*total utility, U*) dari mengkonsumsikan suatu jenis barang berupa fungsi kuadrat parabolik, dengan kurva berbentuk parabola terbuka ke bawah. Utilitas marjinal (*marginal utility, MU*) ialah utilitas tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dikonsumsi.



Utilitas total :
$U = f(Q)$

Utilitas marjinal :

$$MU = \frac{\Delta U}{\Delta Q}$$

Gambar 7—17

Utilitas total mencapai puncaknya ketika utilitas marjinal nol, dan berkurang ketika utilitas marjinal negatif.

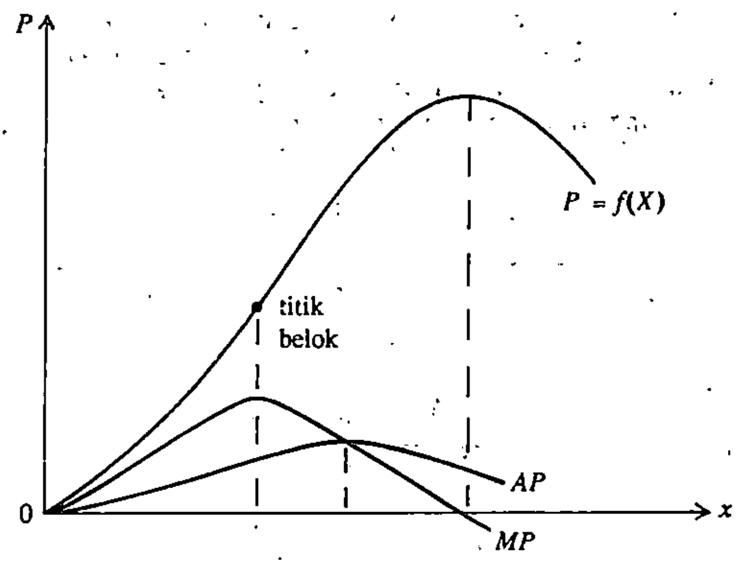
7.3.6 Fungsi Produksi

Bentuk fungsi produk total (*total product, P*) yang non-linear pada umumnya berupa sebuah persamaan kubik yang mempunyai titik belok dan sebuah titik puncak. Produk total merupakan fungsi dari jumlah masukan (*input*, faktor produksi) yang digunakan. Dalam konsep produksi juga dikenal pengertian rata-rata dan marjinal. Produk rata-rata (*average product, AP*) ialah jumlah keluaran atau produk yang dihasilkan dari setiap unit masukan yang digunakan, merupakan hasilbagi produk total terhadap jumlah masukan. Sedangkan produk marjinal (*marginal product, MP*) ialah produk tambahan yang dihasilkan dari setiap tambahan satu unit masukan yang digunakan.

Jika dalam suatu kegiatan produksi dianggap hanya terdapat satu masukan variabel, katakanlah *X*, sementara masukan-masukan lainnya merupakan masukan tetap, maka fungsi produksinya dapat dinyatakan dengan notasi $P = f(X)$.

Produk total	: $P = f(X)$
Produk rata-rata	: $AP = \dfrac{P}{X}$
Produk marjinal	: $MP = \dfrac{\Delta P}{\Delta X}$

Secara grafik, kurva produk total P mencapai puncaknya tepat ketika kurva produk marjinal $MP = 0$. Sedangkan MP mencapai puncaknya tepat pada posisi titik belok kurva P. Di samping itu, kurva MP memotong kurva AP pada posisi maksimum AP. Penjelasan mengenai hal ini dapat dilihat pada Seksi 9.6.5 dan Seksi 9.6.11 di dalam Bab 9.



Gambar 7—18

Kasus 27

Fungsi produksi yang dihadapi oleh seorang produsen ditunjukkan oleh $P = 9X^2 - X^3$. Bentuklah persamaan produk rata-ratanya serta hitunglah produk total dan produk rata-rata tersebut jika digunakan masukan sebanyak

6 unit. Berapa produk marjinalnya jika masukan yang digunakan ditambah 1 unit ?

$P = 9X^2 - X^3 \rightarrow AP = P/X = 9X - X^2$

Untuk $X = 6 \rightarrow P = 9(6)^2 - (6)^3 = 108$

$AP = 9(6) - (6)^2 = 108/6 = 18$

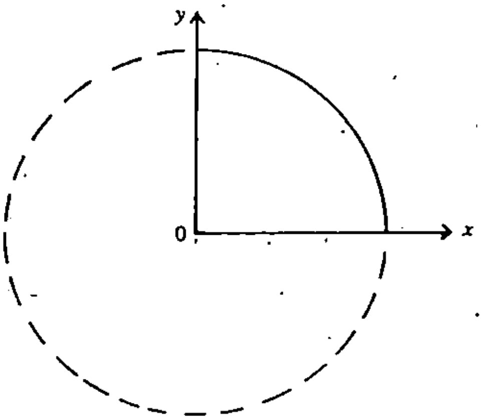
Jika $X = 7 \rightarrow P = 9(7)^2 - (7)^3 = 98$

$$MP = \frac{\Delta P}{\Delta X} = \frac{98 - 108}{7 - 6} = -10$$

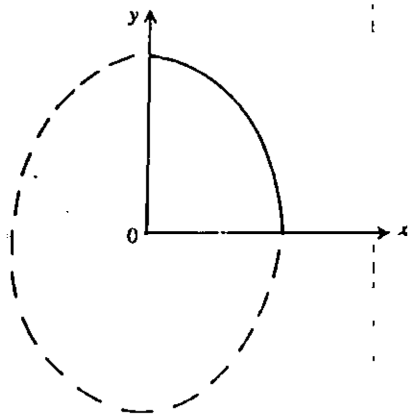
Produk marjinal negatif berarti masukan tambahan yang digunakan justru mengurangi hasil produksi.

7.3.7 Kurva Transformasi Produk

Kurva transformasi produk (*product transformation curve*) ialah kurva yang menunjukkan pilihan kombinasi jumlah produksi dua macam barang dengan menggunakan masukan yang sama sejumlah tertentu. Kurva ini dikenal juga dengan sebutan kurva kemungkinan produksi (*production possibility curve*). Kurva transformasi produk yang kuadratik dapat berupa potongan-potongan lingkaran, elips, hiperbola maupun potongan parabola.



(a)
Kurva transformasi produk berupa potongan lingkaran



(b)
Kurva transformasi produk berupa potongan elips

Gambar 7—19

Pada gambar di atas, x dan y masing-masing melambangkan jumlah produk X dan jumlah produk Y. Karena kurva transformasi produk mencerminkan pilihan kombinasi produksi, maka penambahan jumlah produk yang satu akan mengurangi jumlah produk yang lain. Patut dicatat : kurva transformasi produk dapat pula berupa garis lurus berlereng negatif.

Kasus 28

Sebuah pabrik yang menggunakan bahan baku kulit menghasilkan sepatu dan tas. Kurva transformasi produk yang dihadapinya ditunjukkan oleh persamaan $4s^2 + 6{,}25t^2 = 40.000$. Berapa pasang sepatu dan berapa buah tas paling banyak dapat diproduksi ? Berapa pasang sepatu dapat dibuat jika pabrik ini memproduksi 60 buah tas ?

Jumlah sepatu terbanyak yang dapat dibuat adalah jika pabrik tidak memproduksi tas ($t = 0$). Dengan perkataan lain, seluruh kulit yang tersedia (40.000 unit) dialokasikan untuk membuat sepatu.

$t = 0 \rightarrow 4s^2 = 40.000, \quad s^2 = 10.000, \quad s = 100$ pasang.

Jumlah tas terbanyak dapat dibuat :

$s = 0 \rightarrow 6{,}25t^2 = 40.000, \quad t^2 = 6.400, \quad t = 80$ buah

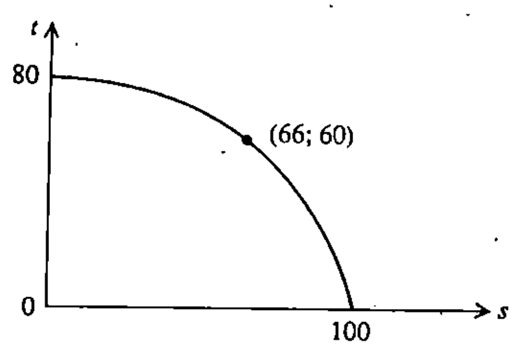
Jika $t = 60$,

$4s^2 = 40.000 - 6{,}25(60)^2$

$4s^2 = 17.500$

$s^2 = 4.375$

$s = 66{,}14 \cong 66$ pasang



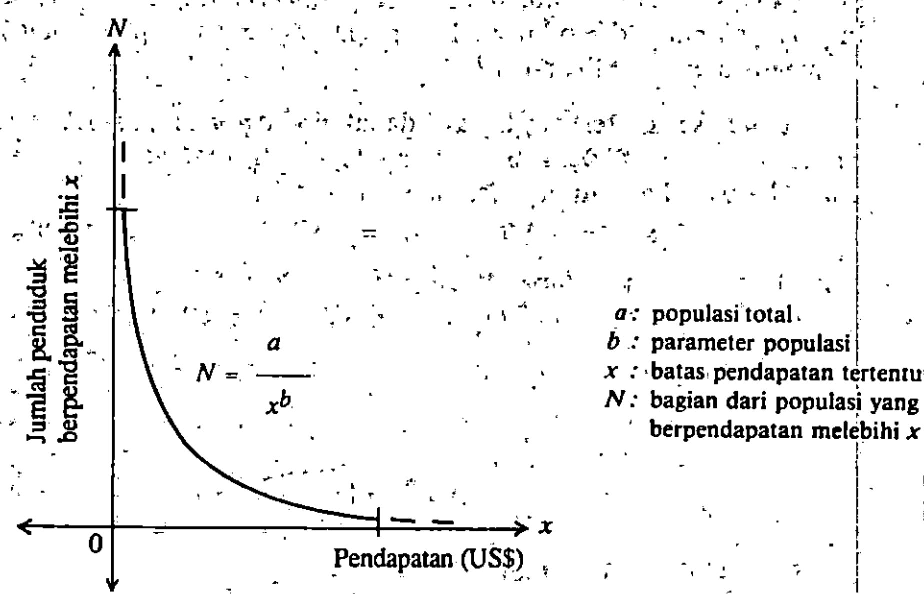
Gambar 7—20

7.3.8 Model Distribusi Pendapatan Pareto

Menurut *Vilfredo Pareto*, jumlah penduduk dari suatu populasi a yang berpendapatan melebihi x adalah :

$$\boxed{N = \frac{a}{x^b}}$$

di mana b merupakan suatu parameter atau besaran populasi tertentu, pada umumnya berkisar 1,5. Kecuali ditentukan lain, nilai $b = 1{,}5$. Model distribusi pendapatan versi Pareto ini mencerminkan sebuah hiperbola samasisi untuk rentang $0 < N \leqslant a$ dan $0 < x <$ pendapatan maksimum dalam populasi. Karena model ini diterapkan secara universal, variabel pendapatan x dinyatakan dalam mata uang yang umum digunakan oleh negara-negara di seluruh dunia, yakni dollar Amerika Serikat (US \$). Dengan demikian untuk diterapkan pada kasus Indonesia, pendapatan dalam rupiah harus dikonversikan dulu ke dalam satuan US \$.



Gambar 7—21

Kasus 29

Hitunglah berapa dari 8 juta penduduk DKI Jakarta yang berpendapatan melebihi Rp 800 ribu. Berapa orang yang berpendapatan antara Rp 480 ribu dan Rp 640 ribu ? (Kurs yang berlaku US \$ 1 = Rp 2.000,00).

x = Rp 800.000,00 = US \$ 400

$$N = \frac{8.000.000}{(400)^{3/2}} = \frac{8.000.000}{8.000} = 1000 \text{ orang}$$

x = Rp 480.000,00 = US \$ 240

$$N = \frac{8.000.000}{(240)^{3/2}} = \frac{8.000.000}{3.718} = 2152 \text{ orang}$$

x = Rp 640.000,00 = US.$ 320

$$N = \frac{8.000.000}{(320)^{3/2}} = \frac{8.000.000}{5.724} = 1398 \text{ orang}$$

Jadi, terdapat 1000 orang yang berpendapatan melebihi Rp 800 ribu. Sedangkan penduduk yang berpendapatan antara Rp 480 ribu dan Rp 640 ribu ada 754 orang (angka-angka di belakang koma dalam perhitungan ini dibulatkan).

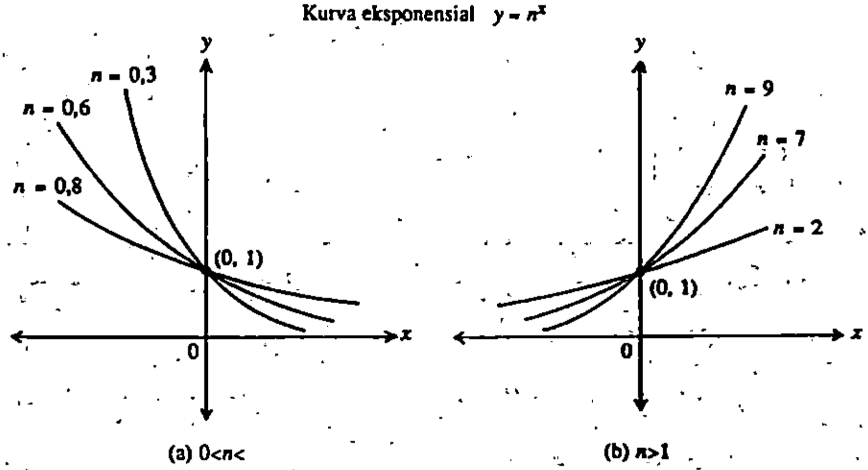
7.4 FUNGSI EKSPONENSIAL

Fungsi eksponensial ialah fungsi dari suatu konstanta berpangkat variabel bebas. Bentuk fungsi eksponensial yang paling sederhana adalah :

$$\boxed{y = n^x} \qquad n > 0$$

Kurvanya terletak di kuadran-kuadran atas (kuadran I dan kuadran II) pada sistem koordinat. Dalam hal $0 < n < 1$, kurva dari $y = n^x$ bergerak menurun dari kiri ke kanan (*monotonically decreasing*), serta asimtotik terhadap sumbu -x dan memotong sumbu -y pada (0,1). Dalam hal $n > 1$, kurva dari $y = n^x$ bergerak menaik dari kiri ke kanan (*monotonically increasing*), juga asimtotik terhadap sumbu -x dan memotong sumbu -y pada (0, 1). Jika $n = 1$, kurvanya akan berupa garis lurus sejajar sumbu -x.

Kurva eksponensial $y = n^x$



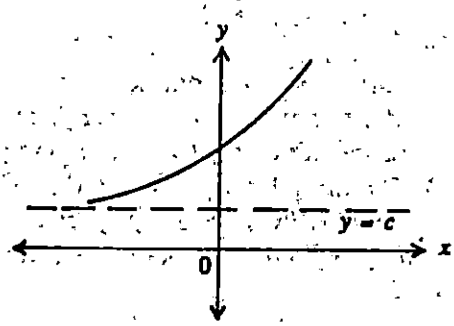
Gambar 7—22

Bentuk fungsi eksponensial yang lebih umum adalah :

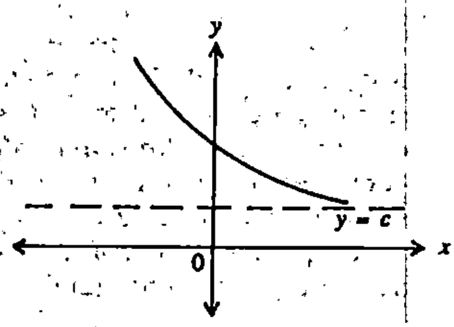
$$\boxed{y = ne^{kx} + c} \qquad \begin{array}{l} n \neq 0 \\ k,\ c : \text{konstanta} \end{array}$$

Kurvanya asimtotik terhadap garis $y = c$. Mengingat bentuk ini mengandung bilangan e maka pengetahuan tentang konsep logaritma, khususnya logaritma Napier yang berbasis e, sangat diperlukan untuk menyelesaikan persamaan eksponensial semacam ini. Kurva dari $y = ne^{kx} + c$ untuk nilai-nilai n, k dan c tertentu dapat dilihat pada Gambar 7-23 dan Gambar 7-24.

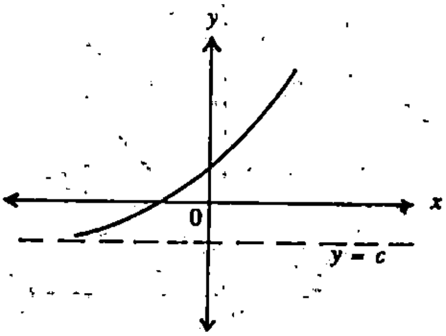
Kurva eksponensial $y = ne^{kx} + c$ untuk $n > 0$



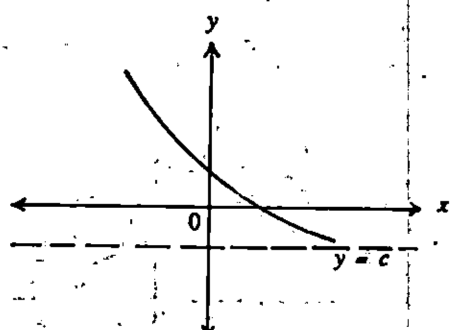
(a) jika $k>0$, $c \geq 0$



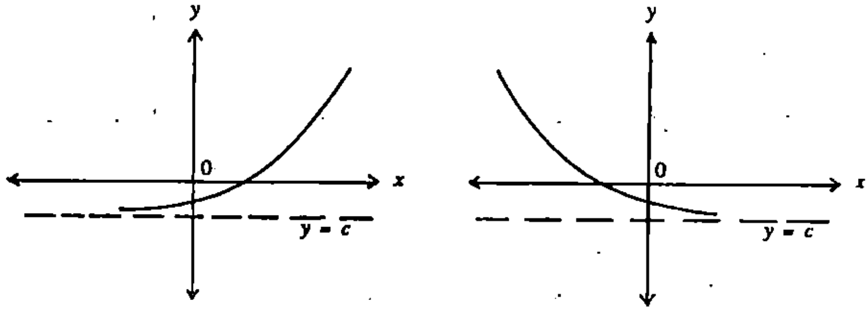
(b) jika $k<0$, $c \geq 0$



(c) $k>0$, $c \leq 0$, $|c|<n$



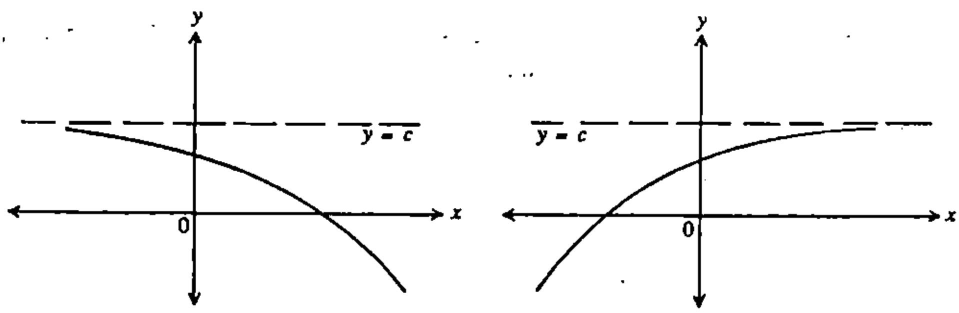
(d) $k<0$, $c \leq 0$, $|c|<n$



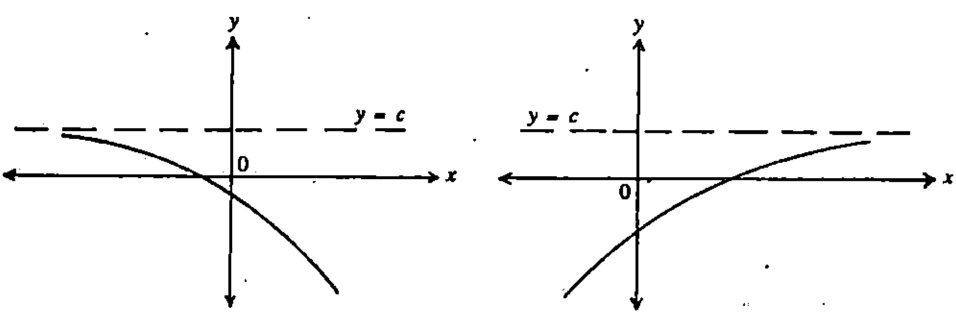
(e) $k>0$, $c\leq0$, $|c|>n$ (f) $k<0$, $c\leq0$, $|c|>n$

Gambar 7 – 23

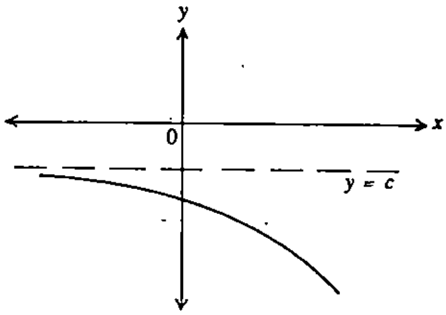
Kurva eksponensial $y = ne^{kx} + c$ untuk $n < 0$



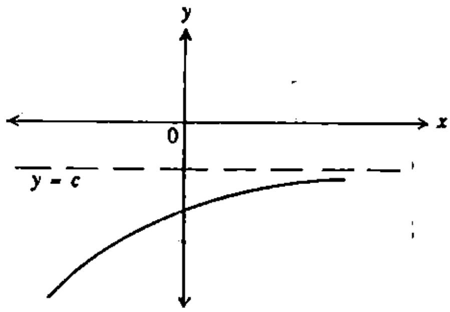
(a) $k>0$, $c>0$, $c>|n|$ (b) $k<0$, $c>0$, $c>|n|$



(c) $k>0$, $c>0$, $c<|n|$ (d) $k<0$, $c>0$, $c<|n|$



(e) jika $k>0$, $c \leq 0$



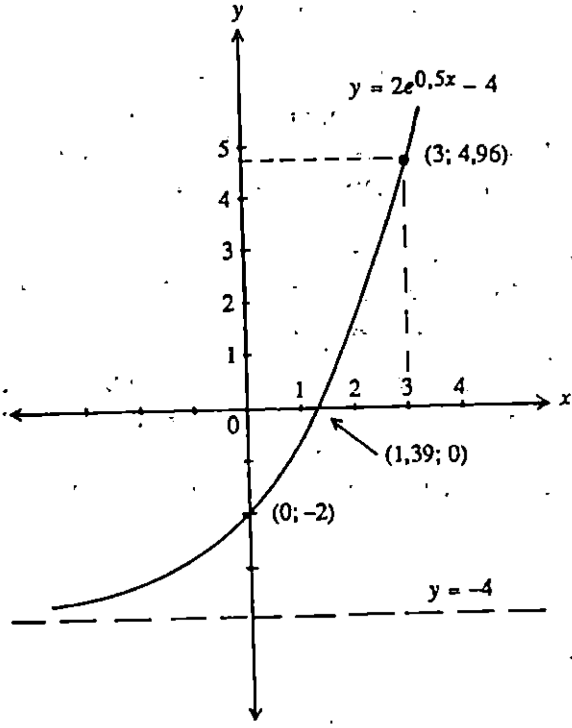
(f) jika $k<0$, $c \leq 0$

Gambar 7—24

Titik potong kurva eksponensial $y = ne^{kx} + c$ pada sumbu-x ialah $(\frac{1}{k} \ln | \frac{c}{n} |, 0)$, sedangkan pada sumbu-$y$ ialah $(0, n + c)$. Hal ini berlaku umum untuk ke-12 panel pada Gambar 7-23 dan Gambar 7-24.

Contoh :

1) Tentukan titik potong kurva eksponensial $y = 2e^{0,5x} - 4$ pada masing-masing sumbu dan hitunglah $f(3)$



Gambar 7—25

Pada sumbu -x : $y = 0$

$2\,e^{0,5\,x} = 4$

$e^{0,5\,x} = 2$

$\ln e^{0,5\,x} = \ln 2$

$0,5\,x \ln e = \ln 2 \qquad (\ln e = 1)$

$0,5\,x = 0,69$

$x = 1,39$

Titik potongnya : (1,39; 0)

Pada sumbu -y : $x = 0$

$y = 2\,e^{0,5(0)} - 4$

$y = 2\,e^{0} - 4$

$y = 2 - 4 = -2$

Titik potongnya : (0; - 2)

Untuk $x = 3$,

$y = 2\,e^{1,5} - 4$

$y = 2(4,48) - 4$

$y = 4,96$

[Bandingkan kurva pada Gambar 7-25 ini dengan kurva pada Gambar 7-23(e) di depan)].

2) Tentukan titik potong kurva eksponensial $y = -3\,e^{2x} + 6$ pada masing-masing sumbu dan hitunglah $f(4)$.

Untuk $y = 0$, $3\,e^{2x} = 6$, $2\,x \ln e = \ln 2$, $2\,x = 0,69 \rightarrow x = 0,35$
Untuk $x = 0$, $y = -3\,e^{0} + 6 = -3 + 6 = 3$
Jika $x = 4$, $y = -3\,e^{8} + 6 = -3\,(2980,96) + 6 = -8936,87$
[Pola kurvanya seperti kurva pada Gambar 7-24(a); dengan asimtot $y = 6$, memotong sumbu -x pada (0,35; 0) dan memotong sumbu -y pada (0; 3)].

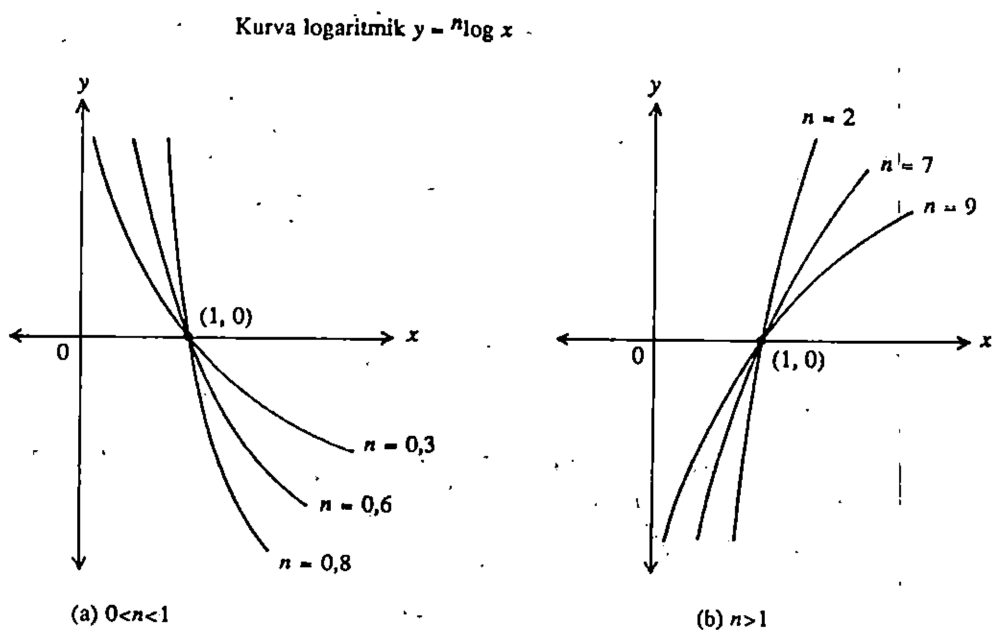
7.5 FUNGSI LOGARITMIK

Fungsi logaritmik merupakan kebalikan dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritma. Bentuk fungsi logaritmik yang paling sederhana adalah :

$$\boxed{y = {}^{n}\log x} \qquad n > 0 \text{ dan } n \neq 1$$

Kurvanya terletak di kuadran-kuadran kanan (kuadran I dan kuadran IV) pada sistem koordinat. Dalam hal $0 < n < 1$, kurva dari $y = {}^{n}\log x$ bergerak menurun dari kiri ke kanan, asimtotik terhadap sumbu -y dan memotong sumbu -x pada (1, 0). Dalam hal $n > 1$, kurvanya bergerak menaik dari kiri ke kanan, juga asimtotik terhadap sumbu -y dan memotong sumbu -x pada (1, 0). Besar kecilnya nilai n menentukan kelengkungan kurvanya. Perhatikan Gambar 7-26, kemudian bandingkan dengan Gambar 7-22 sebelumnya.

Karena $y = n^x$ dan $y = {}^{n}\log x$ merupakan fungsi-fungsi yang berkebalikan maka, dengan saling menukarkan sumbu-sumbu koordinat, gambar dari salah satu fungsi tersebut merupakan gambar dari fungsi lainnya. Jika Gambar 7-22 diputar 90° searah putaran jarum jam, hasilnya akan mirip dengan Gambar 7-26.



Gambar 7—26

Bentuk fungsi logaritmik yang lebih umum adalah :

$$\boxed{y = a \ln (1 + x) + b} \qquad x > -1$$

Kurvanya terletak di sebelah kanan dan asimtotik terhadap garis $x = -1$. Untuk nilai-nilai a dan b tertentu, kurva dari fungsi logaritmik ini dapat dilihat pada Gambar 7-27. Perpotongannya dengan masing-masing sumbu dapat dicari sebagai berikut.

Perpotongan dengan sumbu -x : $y = 0$

$$a \ln(1 + x) = -b$$

$$\ln(1 + x) = -b/a$$

$$(1 + x) = e^{-(b/a)}$$

$$x = e^{-(b/a)} - 1$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-(b/a)} - 1 &> 0 \quad \text{jika } \frac{b}{a} < 0 \\ e^{-(b/a)} - 1 &= 0 \quad \text{jika } \frac{b}{a} = 0 \\ e^{-(b/a)} - 1 &< 0 \quad \text{jika } \frac{b}{a} > 0 \end{aligned}\right.$$

Dengan demikian, $e^{-(b/a)} - 1 > 0$

jika $a > 0$, $b > 0$ [Gambar 7-27(a)]

atau $a < 0$, $b < 0$ [Gambar 7-27(d)]

$e^{-(b/a)} - 1 < 0$

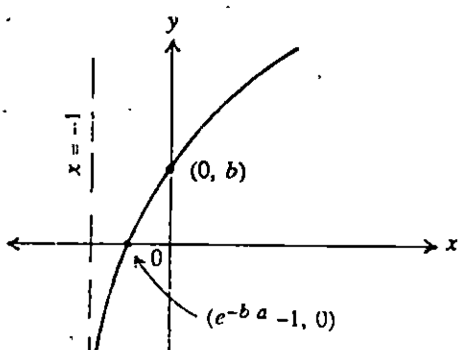
jika $a > 0$, $b < 0$ [Gambar 7-27(c)]

atau $a < 0$, $b > 0$ [Gambar 7-27(b)]

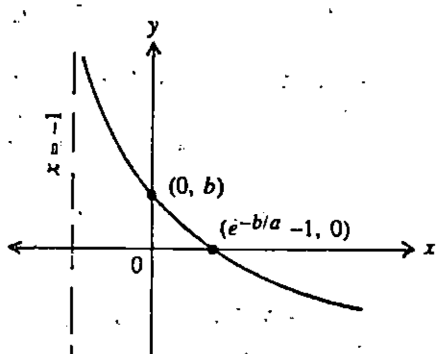
Perpotongan dengan sumbu -y : $x = 0$

$$y = a \ln(1 + 0) + b = a \ln 1 + b = a(0) + b = b$$

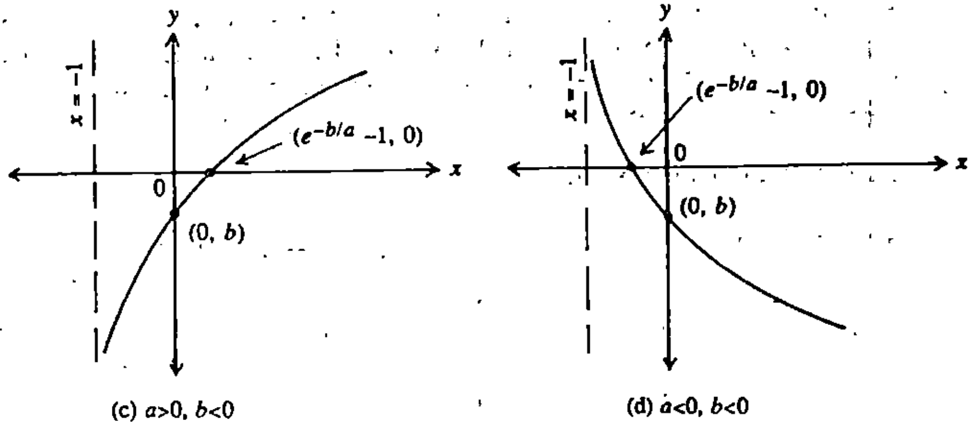
Kurva logaritmik $y = a \ln(1 + x) + b$



(a) $a>0$, $b>0$



(b) $a<0$, $b>0$



Gambar 7—27

Contoh :

Tentukan titik potong kurva logaritmik $y = 2 \ln(1 + x) + 6$ pada masing-masing sumbu dan hitunglah $f(4)$.

Untuk $y = 0$, $2 \ln(1 + x) = -6$, $\ln(1 + x) = -3$, $1 + x = e^{-3}$,
$1 + x = 0,0498$, $x = -0,9502$
Titik potong dengan sumbu -x : (- 0,9502; 0)

Untuk $x = 0$, $y = 6$. Titik potong dengan sumbu -y : (0; 6)

Jika $x = 4$, $y = 2 \ln 5 + 6 = 2(1,6094) + 6 = 9,2188$.
Pola kurvanya seperti kurva pada Gambar 7-27(a).

Latihan Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritmik

Berdasarkan Gambar 7-23 atau 7-24, nyatakan seperti kurva yang mana pola kurva-kurva eksponensial berikut; kemudian tentukan titik potong pada masing-masing sumbu dan asimtotnya.

1. $y = 0,05\, e^{-0,004x} + 2$
2. $y = -0,4\, e^{0,005x} - 2$
3. $y = 3\, e^{0,00025x} - 3$
4. $y = 0,05\, e^{x} + 0,5$
5. $y = -0,6\, e^{0,25x} + 3$
6. $y = -10\, e^{0,05} + 4$
7. $y = 4\, e^{-0,4055x} - 6$; tentukan pula $f(2,4661)$ dan $f(7,3983)$.
8. $y = -e^{-x} + 0,5$; tentukan pula $f(3)$ dan $f(-3)$.

Untuk kurva-kurva logaritmik berikut, nyatakan seperti kurva yang mana pola kurvanya dalam Gambar 7-27.

Tentukan titik potongnya pada masing-masing sumbu koordinat serta $f(4)$ dan $f(9)$.

9. $y = -0{,}25 \ln (1 + x) + 0{,}75$.
10. $y = -400 \ln (1 + x) - 50$.

7.6 PENERAPAN EKONOMI

Banyak model-model bisnis dan ekonomi sangat relevan ditelaah dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritmik, khususnya model-model yang berkenaan dengan aspek pertumbuhan. Permintaan, penawaran, biaya dan penerimaan — selain berkecenderungan kuadratik dan kubik, sebagaimana dibahas di dalam Sub-bab 7.3 di depan — dapat pula berkecenderungan eksponensial dan logaritmik. Permintaan, penawaran, biaya dan penerimaan yang eksponensial serta logaritmik tidak dibahas di sini mengingat, meskipun bentuk fungsinya berbeda, analisisnya tidak berbeda. Sub-bab ini lebih mencurahkan perhatian pada penerapan fungsi eksponensial dan fungsi logaritmik dalam model-model yang berkaitan dengan aspek pertumbuhan.

7.6.1 Model Bunga Majemuk

Dalam Seksi 4.3.2 di depan telah dijelaskan bahwa, untuk menghitung jumlah di masa datang dari jumlah sekarang suatu pinjaman atau tabungan, kita dapat menggunakan model bunga majemuk

$$\boxed{F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}$$

di mana F_n melambangkan jumlah pinjaman atau tabungan setelah n tahun, P melambangkan jumlahnya sekarang (tahun ke-0), i adalah tingkat bunga per tahun, m adalah frekuensi pembayaran bunga dalam setahun dan n adalah jumlah tahun.

Model bunga majemuk ini tak lain merupakan bentuk fungsi eksponensial, dengan F_n sebagai variabel terikat (*dependent variable*) dan n sebagai variabel bebas (*independent variable*). Dengan demikian prinsip-prinsip penyelesaian persamaan eksponensial relevan diterapkan atas model ini.

Jika m sangat besar, bunga diperhitungkan sangat sering (terus menerus) dalam setahun, jumlah di masa datang tersebut dapat dirumuskan menjadi :

$$\boxed{F_n \approx Pe^{in}\ ^{*)}} \qquad e \approx 2{,}72$$

Bentuk ini dinamakan model bunga majemuk sinambung (*continuous compound interest*). Bunga majemuk sinambung dalam kasus pinjam-meminjam seringkali dipraktekkan oleh para pelepas uang atau "lintah darat", yang kadang-kadang menetapkan atau memperhitungkan bunga atas uang yang dipinjamkannya secara harian (m = 360). Oleh karenanya model ini dapat pula kita sebut "model lintah darat".

Kasus 30

Seorang ibu rumahtangga meminjam uang Rp 5 juta pada seorang pelepas uang untuk jangka waktu 2 tahun. Bunga setingkat 10% per tahun diperhitungkan secara harian (dalam bisnis : 1 tahun = 360 hari). Hitunglah jumlah yang harus dibayarkan oleh debitor pada saat hutangnya jatuh tempo.

I. Dengan rumus bunga majemuk biasa : $F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$

(a) tanpa menggunakan logaritma :

$$F_2 = 5.000.000\,(1 + \frac{0{,}10}{360})^{(360 \times 2)}$$
$$= 5.000.000\,(1{,}0003)^{(720)}$$ → dipangkat ???
$$= 5.000.000\,(1{,}24) = 6.200.000$$

(b) dengan menggunakan logaritma :

$F_2 = 5.000.000\,(1{,}0003)^{720}$
$\log F_2 = \log 5.000.000 + 720 \log 1{,}0003$
$\log F_2 = 6{,}70 + 0{,}09$
$\log F_2 = 6{,}79 \xrightarrow{\text{antilog}} F_2 = 6.200.000$

II. Dengan rumus bunga majemuk sinambung : $F_n \approx Pe^{in}$

(a) tanpa menggunakan logaritma :

$$F_2 \approx 5.000.000\, e^{0{,}10 \times 2}$$
$$\approx 5.000.000\, e^{0{,}20} \approx 5.000.000\,(1{,}22) \approx 6.100.000$$
shift e

(b) dengan menggunakan logaritma :

$F_2 \approx 5.000.000\, e^{0{,}20}$
$\ln F_2 \approx \ln 5.000.000 + 0{,}20 \ln e$
$\ln F_2 \approx 15{,}42 + 0{,}20$
$\ln F_2 \approx 15{,}62 \rightarrow F_2 \approx 6.100.000$

---

*) tanda "≈" berarti "lebih kurang sama dengan".

Jadi, jumlah pelunasan hutang tersebut adalah sekita· Rp 6,10 juta atau tepatnya Rp 6,20 juta.

7.6.2 Model Pertumbuhan

Model pertumbuhan penduduk yang diperkenalkan di dalam Seksi 4.3.3 di depan, yakni

$$\boxed{P_t = P_1 R^{t-1}} \qquad \boxed{R = 1 + r}$$

tak lain juga merupakan bentuk fungsi eksponensial, dengan P (jumlah penduduk) sebagai variabel terikat dan t (waktu) sebagai variabel bebas. Model semacam ini tidak saja relevan bagi penaksiran variabel kependudukan, tetapi juga dapat diterapkan untuk menaksir variabel-variabel lain berkenaan dengan pertumbuhannya.

Agar model di atas dapat diterapkan secara umum terhadap segala macam variabel, sehingga jalan pikiran kita tidak semata-mata terpaku pada persoalan kependudukan, maka perlu dilakukan sedikit perubahan notasi menjadi :

$$\boxed{N_t = N_1 R^{t-1}} \qquad \boxed{R = 1 + r}$$

di mana N melambangkan variabel yang sedang diamati, r ialah persentase pertumbuhannya per satuan waktu tertentu, sedangkan t adalah indeks waktu.

Kasus 31

Lembaga Penelitian Ekonomi Nasional memulai operasinya dengan 10 orang peneliti. Setiap tahun setiap peneliti merekrut 2 orang peneliti baru. Berapa orang jumlah tenaga peneliti di lembaga tersebut setelah beroperasi 5 tahun ?

$N_1 = 10$	$N_t = N_1 R^{t-1}$
$R = 1 + 2$	$N_5 = (10)(3)^{5-1}$
$t = 5$	$= (10)(81) = 810$ orang

Kasus 32

Produk Domestik Bruto Indonesia pada tahun 1981, menurut harga konstan tahun 1973, tercatat sebesar Rp 12.055 milyar. Jika dalam periode 1981—1990 perekonomian bertumbuh dengan rata-rata 5% per tahun, berapa PDB pada tahun 1990 ?

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 12.055 \text{ (milyar)} \\ R &= 1 + 0{,}05 \\ t &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} N_{10} &= (12.055)(1{,}05)^9 \\ &= (12.055)(1{,}55) = 18.685{,}25 \text{ milyar.} \end{aligned}$$

7.6.3 Kurva Gompertz

Model pertumbuhan dalam Seksi 7.6.2 di atas, yang kurva eksponensialnya seperti Gambar 7-22 di depan, mengandung arti bahwa variabel terikat N dapat terus menerus membesar (tanpa batas maksimum) seiring dengan perkembangan waktu. Sesungguhnya tidak semua variabel bisnis atau ekonomi berpola demikian. Ada variabel-variabel tertentu yang mempunyai batas maksimum dalam kaitannya dengan perkembangan waktu. Variabel ini meningkat secara eksponensial selama jangka waktu tertentu, tetapi sesudah itu peningkatannya sangat kecil, atau bahkan tidak berarti, meskipun waktu terus berjalan. Dengan perkataan lain, N cenderung asimtotik terhadap batas maksimum tertentu kendati t tetap membesar.

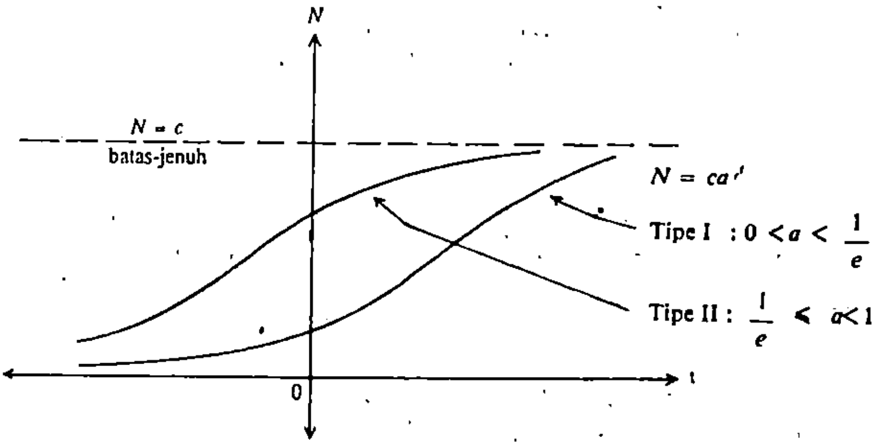
Untuk menganalisis variabel yang gejalanya demikian (asimtotik terhadap batas-jenuh tertentu), model pertumbuhan yang tepat untuk diterapkan adalah model pertumbuhan *Gompertz*. Model ini didasarkan atas bentuk atau pola kurva Gompertz, yang bentuk persamaannya :

$$\boxed{N = ca^{r^t}}$$

di mana N melambangkan jumlah variabel tertentu yang sedang diamati, r melambangkan tingkat pertumbuhan rata-rata ($0 < r < 1$), a melambangkan proporsi pertumbuhan awal, c melambangkan batas-jenuh pertumbuhan N (merupakan asimtot atas), sedangkan t adalah indeks waktu.*)

*) Pada $t = 0$, $N = $ ca. Berarti $a = (N \text{ pada } t = 0)/c$.

Kurva Gompertz mempunyai dua tipe dasar yakni :



Gambar 7 — 28

Kurva Tipe I meningkat dengan pertambahan yang membesar (*positively accelerated*) untuk nilai-nilai t positif yang kecil, tetapi meningkat dengan pertambahan yang mengecil (*negatively accelerated*) untuk nilai-nilai t positif yang besar. Sedangkan kurva Tipe II meningkat dengan pertambahan yang mengecil untuk semua nilai t positif.

Kurva yang ditemukan oleh Gompertz ini semula digunakan secara meluas oleh para psikolog, untuk menggambarkan berbagai aspek pertumbuhan dan perkembangan jiwa manusia. Ahli-ahli organisasi memakainya untuk menggambarkan pertumbuhan berbagai bentuk organisasi. Kemudian para ekonom memanfaatkannya pula karena dipandang relevan untuk menggambarkan pola pertumbuhan beberapa variabel bisnis dan ekonomi tertentu.

Kasus 33

Sebuah pasar swalayan (*supermarket*) di Jakarta mempekerjakan 20 orang karyawan pada permulaan operasinya. Karena usahanya berkembang, jumlah karyawan yang dipekerjakan meningkat rata-rata 25% per tahun. Berdasarkan pertimbangan bisnis, sang manajer memutuskan tidak akan mempekerjakan lebih dari 400 orang karyawan. Bentuklah persamaan penggunaan tenaga kerja di pasar swalayan ini dalam hubungannya dengan perkembangan waktu. Berapa jumlah karyawan yang dipekerjakan setelah pasar swalayan tersebut beroperasi 4 tahun ?

$$\left.\begin{aligned} a &= 20/400 = 0{,}05 \\ c &= 400 \\ r &= 0{,}25 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} N &= ca^{r^t} \\ N &= (400)(0{,}05)^{0{,}25^t} \end{aligned}$$

Untuk $t = 4$ $\rightarrow$ $N = (400)(0{,}05)^{0{,}25^4}$

$\log N = \log 400 + 0{,}25^4 \log 0{,}05$

$\log N = 2{,}6021 + 0{,}0039\,(-1{,}3010)$

$\log N = 2{,}6021 - 0{,}0051$

$\log N = 2{,}5970 \rightarrow N = 395{,}3539$

$= 395$ orang.

Kasus 34

Biaya total (dalam jutaan rupiah) yang dikeluarkan untuk proyek pembangunan sebuah jembatan ditunjukkan oleh persamaan

$$C = 800\,(0{,}10)^{0{,}40^t}.$$

di mana t menunjukkan jumlah tahun sejak proyek dimulai. Berapa pengeluaran awal proyek tersebut ? Berapa pengeluaran total maksimum yang diperkenankan ? Berapa biaya total yang dikeluarkan setelah proyek berjalan 6 tahun ?

Pengeluaran awal $\equiv C$ pada $t = 0$, yaitu :
$C = 800(0{,}10) = 80$ juta rupiah

Pengeluaran total maksimum $\equiv c = 800$ juta rupiah

Setelah proyek berjalan 6 tahun :

$C = 800(0{,}10)^{0{,}40^6}$

$\log C = \log 800 + 0{,}0041 \log 0{,}10$

$\log C = 2{,}9031 + 0{,}0041\,(-1)$

$\log C = 2{,}899 \rightarrow C = 792{,}48$ juta rupiah.

Catatan :

Mengingat model Gompertz ini relatif kompleks, pemahaman dan penerapannya perlu dicerna secara hati-hati. Satu hal senantiasa harus diingat : bahwa r dalam persamaannya adalah menunjukkan tingkat pertumbuhan rata-rata; jadi, ia tidak konstan dari tahun ke tahun, melainkan cenderung sangat besar pada tahun-tahun pertama tetapi kemudian kecil dan mengecil pada tahun-tahun berikutnya. Kurva belajar, yang segera akan dibahas berikut ini, juga tergolong kompleks. Banyak makna-tersirat yang terkandung di dalam model-modelnya, yang harus dilihat secara jeli dan ditafsirkan secara hati-hati.

7.6.4 Kurva Belajar

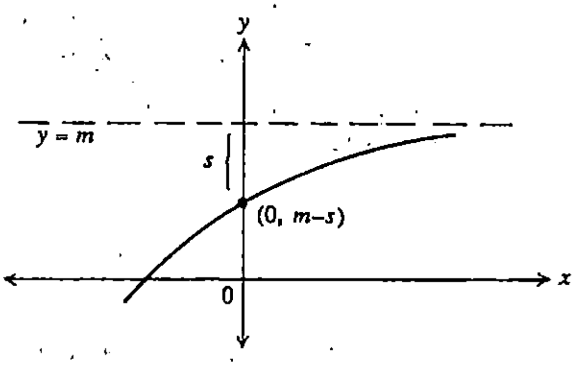
Satu lagi model eksponensial yang semula digunakan oleh ahli-ahli psikologi, tetapi kemudian dimanfaatkan dan dikembangkan oleh para ekonom, adalah kurva belajar (*learning curve*). Dinamakan demikian karena memang semula diterapkan untuk mengamati hal-hal yang berhubungan dengan kegiatan belajar. Dalam ekonomi, kurva belajar cocok untuk menggambarkan perilaku produksi dan biaya dalam hubungannya dengan variabel waktu.

Bentuk dasar persamaan kurva belajar adalah :

$$\boxed{y = m - se^{-kx}}$$

$k, m, s > 0$

Kurvanya mirip dengan kurva eksponensial pada Gambar 7-24(b).



Gambar 7—29

Konstanta m melambangkan batas-jenuh y, atau y tertinggi yang dapat tercapai. Perhatikan bahwa jika $x = 0$, $y = m - s$.

■ Untuk diterapkan pada kasus perilaku produksi dalam hubungannya dengan variabel waktu, notasinya dapat disesuaikan menjadi :

$$\boxed{P = P_m - P_s e^{-rt}}$$

di mana P melambangkan produksi per satuan waktu setelah t satuan waktu, P_m menunjukkan kapasitas produksi maksimum per satuan waktu, P_s mencerminkan sisa kapasitas produksi pada permulaan kegiatan produksi (pada $t = 0$), sedangkan r adalah tingkat pertumbuhan produksi.

Kasus 35

Kapasitas produksi maksimum pabrik mentega PT "Lezat" adalah 4000 kaleng per bulan. Pada permulaan operasinya, pabrik tersebut hanya mampu memanfaatkan 75% dari kapasitas yang tersedia. Akan tetapi manajer produksi yakin bahwa produksi dapat ditingkatkan 5% setiap bulan. Bentuklah persamaan perilaku produksi bulanan pabrik mentega ini. Berapa kaleng mentega yang dihasilkan pada saat produksi perdananya ? Berapa kaleng mentega produksinya per bulan setelah pabrik beroperasi selama 10 bulan ?

Produksi perdana = 75% x P_m = 75% x 4000 = 3000

$P_s = 25\% \times P_m \equiv P_m - 3000 = 1000$

$$P = P_m - P_s e^{-rt} = 4000 - 1000\, e^{-0{,}05\,t}$$

Untuk $t = 10$, $P = 4000 - 1000\, e^{-0{,}5}$

$P = 4000 - 1000\,(0{,}6065) = 3393{,}5$

Jadi, setelah 10 bulan, produksinya per bulan 3393 kaleng.

■ Untuk diterapkan pada kasus perilaku biaya, notasi kurva belajar di atas dapat disesuaikan menjadi :

$$\boxed{C = C_m - C_s e^{-rt}}$$

Dalam persamaan ini, C melambangkan biaya total per satuan waktu, C_m menunjukkan biaya maksimum yang diperkenankan (anggaran yang disediakan) per satuan waktu, C_s mencerminkan sisa anggaran pada permulaan periode (pada $t = 0$), sedangkan r adalah persentase kenaikan biaya per satuan waktu.

Kasus 36

Biaya total per tahun (dalam jutaan rupiah) yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 10 - 4\, e^{-0{,}1\,t}$. Berapa juta rupiah biaya total yang dikeluarkan pada permulaan operasi ? Hitunglah biaya per tahun yang dikeluarkan setelah perusahaan beroperasi selama 7 tahun.

Biaya total pada tahap permulaan = 10 − 4 = 6 (juta rupiah). Biaya per tahun setelah 7 tahun :

$C = 10 - 4\, e^{-0{,}7}$

$C = 10 - 4(0{,}4966) = 10 - 1{,}9864 = 8{,}0136$

→ sekitar Rp 8 juta.

7.6.5 Model Efisiensi Wright

Terilham oleh kurva belajar, pada tahun 1936 *T.P. Wright* berhasil mengembangkan model eksponensial yang dapat menjelaskan efisiensi waktu dalam kegiatan produksi. Untuk menghargai penemunya, model tersebut dalam buku ini dinamakan "model efisiensi Wright". (Beberapa buku-teks menyebutnya "model kurva belajar yang diperluas").*)

Untuk menekan pengeluaran, guna memperoleh marjin keuntungan yang lebih besar, produsen selalu berupaya meningkatkan efisiensi produksinya. Salah satu bentuk peningkatan efisiensi yang dapat dilakukan adalah berupa penghematan waktu produksi, menghasilkan barang dengan waktu produksi rata-rata yang lebih singkat. Berdasarkan penelitian terhadap sejumlah kasus produksi, T.P. Wright menemukan bahwa "setiap kali produksi dilipatgandakan (dinaikkan dengan 100%), waktu produksi rata-rata kumulatif berkurang dengan (1 — r) persen", di mana r adalah tingkat efisiensi waktu produksi. Dengan demikian, (1 — r) tak lain menunjukkan persentase waktu rata-rata yang berhasil dihemat dari pelipatgandaan produksi.

Kasus 37

Sebuah perusahaan menghabiskan waktu 10.000 jam-kerja untuk memproduksi 500 unit robot, tetapi hanya membutuhkan 6.000 jam-kerja untuk memproduksi 500 unit berikutnya. Hitunglah tingkat efisiensi waktu produksinya (r). Berdasarkan tingkat efisiensi ini, berapa jam-kerja total (T) diperlukan untuk memproduksi 2000 unit robot ?

Waktu rata-rata kumulatif untuk 500 unit = 10.000/500 = 20 j-k
Waktu rata-rata kumulatif untuk 1000 unit = 16.000/1000 = 16 j-k
Penghematan waktu rata-rata = 20 — 16 = 4 j-k = 20%.
Tingkat efisiensi ≡ r = 100% — 20% = 80%.

Waktu yang diperlukan untuk memproduksi 1000 unit pada "angkatan" produksi berikutnya (agar tercapai jumlah 2000 unit) adalah = 80% x 16 x 1000 = 12.800 jam-kerja.
Jumlah waktu total (T) yang diperlukan untuk memproduksi 2000 unit robot = 10.000 + 6.000 + 12.800 = 28.800 jam kerja.

Hubungan antara jumlah produksi dan tahap pelipatgandaan produksi dapat diterangkan dengan persamaan :

$$\boxed{q_k = q_0 . 2^k}$$

di mana k menunjukkan tahap pelipatgandaan, q mencerminkan jumlah produksi total, sedangkan angka 2 mencerminkan bahwa produksi ditingkatkan dengan 100% (dinaikkan menjadi 2 x lipat) dari satu angkatan produksi ke angkatan produksi berikutnya.

*) Sebutan "model efisiensi Wright" dalam buku ini sekaligus dimaksudkan pula untuk menghindari kekacauan dengan model kurva belajar yang dibahas di dalam seksi sebelumnya.

Untuk Kasus 37 di atas, kita dapat membuat daftar sebagai berikut :

k =	0	1	2	3	4	5
q =	500	1000	2000	4000	8000	16000

dst.

Jika q_0 = 1 unit (produksi perdana hanya 1 unit), notasi persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi :

$$\boxed{q = 2^k}$$

Dengan melogaritmakan persamaan eksponensial ini, diperoleh bentuk :

$\log q = \log 2^k$

$\log q = k \log 2, \qquad k = \log q/\log 2$

$k = \log q/0{,}3010$

Hubungan eksponensial antara waktu produksi rata-rata kumulatif (t) dan tahap pelipatgandaan produksi (k) ditunjukkan oleh persamaan :

$$\boxed{t = ar^k}$$

Dengan melogaritmakannya diperoleh :

$\log t = \log a + k \log r$

Karena $k = (\log q/0{,}3010)$, maka :

$\log t = \log a + (\log q/0{,}3010) \log r$

Dengan menyederhanakan $\log r/0{,}3010 = b$, diperoleh :

$\log t = \log a + b \log q$

Bentuk anti-log persamaan inilah yang disebut model efisiensi Wright, yakni :

$$\boxed{t = a\,q^b} \qquad \boxed{b = \frac{\log r}{0{,}3010}}$$

di mana a mencerminkan waktu yang diperlukan untuk memproduksi unit pertama dari produk yang dihasilkan, q mencerminkan jumlah produksi, r adalah tingkat efisiensi waktu produksi, sedangkan t melambangkan waktu produksi rata-rata kumulatif.

Waktu produksi total dapat dihitung dengan cara mengalikan waktu produksi rata-rata kumulatif (t) tadi terhadap jumlah produksinya (q).

$$\boxed{T = t \times q = aq^{b} \times q = aq^{1+b}}$$

Kasus 38

Berdasarkan data dalam Kasus 37, rumuskanlah persamaan efisiensi Wright-nya. Hitunglah waktu rata-rata kumulatif dan waktu total untuk memproduksi 2000 unit robot.

$$r = 80\% = 0{,}8 \rightarrow b = \frac{\log r}{0{,}3010} = \frac{-0{,}0969}{0{,}3010} = -0{,}3219$$

Mencari nilai a :

$$t = aq^{b}; \quad \text{untuk } q = 500, \quad t = 10.000/500 = 20$$
$$20 = a(500)^{-0{,}3219} \rightarrow \quad a = 20(500)^{0{,}3219}$$
$$a = 20(7{,}3926) = 147{,}85$$

Persamaan efisiensi Wright-nya :

$$t = 147{,}85\, q^{-0{,}3219}$$

Persamaan waktu totalnya :

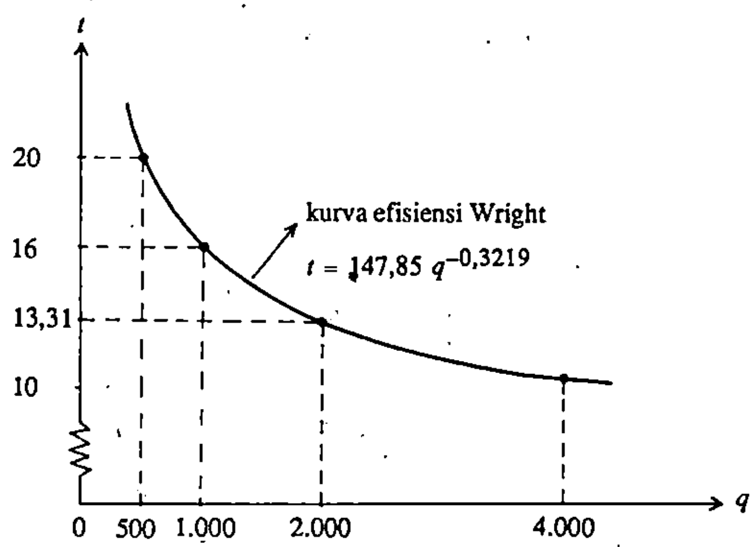
$$T = aq^{1+b}$$
$$T = 147{,}85\, q^{0{,}6781}$$

Untuk $q = 2000$, $t = 147{,}85(2000)^{-0{,}3219}$

$$t = 147{,}85(0{,}09) = 13{,}31 \text{ jam-kerja}$$
$$T = t \times q = 13{,}31 \times 2000 = 26.620 \text{ jam-kerja}$$

(Perbedaan angka hasil perhitungan dengan yang di dalam Kasus 37 disebabkan karena adanya penyederhanaan-penyederhanaan dalam angka-angka berdesimal di sini).

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA



Gambar 7—30

Dalam skala logaritma, kurva efisiensi Wright ini akan berupa sebuah garis lurus berlereng negatif. Di samping kurva efisiensi ini, kurva waktu produksi totalnya dapat pula digambarkan dengan memanfaatkan persamaan $T = 147{,}85\ q^{0{,}6781}$. Pembaca dipersilakan mencoba menggambarkannya sendiri.

BAGIAN TIGA
ALJABAR KALKULUS

BAB 8
LIMIT DAN KESINAMBUNGAN FUNGSI

Aljabar kalkulus, yang berintikan teori tentang diferensiasi dan integrasi, berhubungan dengan perubahan-perubahan sangat kecil dalam variabel-variabel sebuah fungsi. Dikembangkan secara terpisah pada abad ketujuhbelas oleh *Sir Isaac Newton* dan *Gottfried Leibnitz,* kalkulus semula digunakan untuk memecahkan masalah-masalah fisika, astronomi dan geometri. Dewasa ini kalkulus semakin meluas dimanfaatkan oleh berbagai bidang atau ilmu pengetahuan, termasuk ilmu ekonomi. Mengingat analisis dalam bisnis dan ekonomi selalu berhubungan dengan faktor perubahan, kalkulus memainkan peranan penting sebagai salah satu alat analisisnya.

Diferensiasi dan integrasi sesungguhnya merupakan dua operasi matematis yang saling berkebalikan, seperti halnya antara penambahan dan pengurangan, atau antara perkalian dan pembagian. Pada intinya, diferensial (teori tentang diferensiasi) berkenaan dengan penentuan tingkat perubahan suatu fungsi, sedangkan integral (teori tentang integrasi) berkenaan dengan pembentukan persamaan suatu fungsi apabila tingkat perubahan fungsi yang bersangkutan diketahui.

Teori tentang limit dan kesinambungan sebuah fungsi merupakan "akar" dari aljabar kalkulus. Oleh karenanya uraian mengenai kalkulus selalu diawali dengan bahasan tentang kedua hal ini. Meskipun konsep limit dan kesinambungan itu sendiri mungkin terasa relatif lebih canggih (*sophisticated*) dibandingkan dengan konsep diferensial dan integralnya (yang merupakan inti kalkulus), namun mengingat kedudukannya sebagai akar atau landasan kalkulus, keduanya tak dapat dianggap sebagai sekedar untuk diketahui sambil lalu. Itulah sebabnya di dalam buku ini konsep limit dan kesinambungan fungsi disajikan secara khusus dalam satu bab sendiri.

8.1 PENGERTIAN LIMIT

Limit menggambarkan seberapa jauh sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu. Sebagai gambaran : dari $y = f(x)$ akan dapat diketahui limit atau batas perkembangan $f(x)$ ini apabila variabel x terus menerus berkembang hingga mendekati suatu nilai tertentu. Jika fungsi $f(x)$ mendekati L manakala variabel x mendekati a (a dan L keduanya konstanta), maka L disebut limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a. Hubungan ini dilambangkan dengan notasi :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

dan dibaca "limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L". Artinya jika variabel x berkembang secara terus menerus hingga mendekati bilangan tertentu a, maka nilai fungsi $f(x)$ pun akan berkembang pula hingga mendekati L. Atau sebaliknya, fungsi $f(x)$ dapat dibuat mendekati nilai tertentu yang diinginkan L dengan mengembangkan variabel x sedemikian rupa hingga mendekati a.

Dua hal perlu diperhatikan dalam notasi atau pernyataan limit di atas. Pertama, $x \to a$ harus dibaca serta ditafsirkan sebagai x mendekati a, dan bukan berarti $x = a$! Kedua, $\lim f(x) = L$ harus dibaca serta ditafsirkan bahwa L adalah limit fungsi $f(x)$, dan bukan berarti L adalah nilai fungsi $f(x)$! Ringkasnya,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ bukan berarti } f(a) = L$$

Contoh praktis berikut ini akan menjelaskan bagaimana bekerjanya teori limit dan apa sesungguhnya yang dimaksud dengan limit.

Andaikan $y = f(x) = 1 - 2x^2$

maka $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (1 - 2x^2) = -7$ $\quad$ $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (1 - 2x^2) = -17$

Perhatikan perkembangan fungsi $f(x)$ untuk perkembangan variabel x sebagaimana tercermin di dalam tabel berikut :

x	$f(x) = 1 - 2x^2$
3,50	$1 - 2(3,50)^2 = -23,5$
3,10	$1 - 2(3,10)^2 = -18,22$
3,05	$1 - 2(3,05)^2 = -17,605$
3,01	$1 - 2(3,01)^2 = -17,1202$
2,99	$1 - 2(2,99)^2 = -16,8802$
2,95	$1 - 2(2,95)^2 = -16,405$
2,90	$1 - 2(2,90)^2 = -15,82$
2,50	$1 - 2(2,50)^2 = -11,5$
2,10	$1 - 2(2,10)^2 = -7,82$
2,05	$1 - 2(2,05)^2 = -7,405$
2,01	$1 - 2(2,01)^2 = -7,0802$
1,99	$1 - 2(1,99)^2 = -6,9202$
1,95	$1 - 2(1,95)^2 = -6,605$
1,90	$1 - 2(1,90)^2 = -6,22$
1,50	$1 - 2(1,50)^2 = -3,5$
1	$1 - 2(1)^2 = -1,0$

Dari tabel di atas terlihat bahwa jika x bergerak mendekati 2 (baik dari $x = 1$ lalu menaik, maupun dari $x = 3{,}50$ lalu menurun), maka $f(x)$ akan mendekati -7. Sedangkan jika x bergerak mendekati 3 maka $f(x)$ akan berkembang mendekati -17.

Pada contoh di atas variabel x bergerak mendekati nilai-nilai positif tertentu, yakni 2 dan 3. Limit sebuah fungsi dapat pula dianalisis untuk perkembangan variabel yang menuju nilai-nilai negatif tertentu, menuju 0, bahkan menuju $+\infty$ dan $-\infty$. Dengan demikian, untuk setiap fungsi $f(x)$ kita dapat menganalisis $\lim f(x)$ untuk $x \to +a$, $x \to -a$, $x \to 0$, $x \to +\infty$ dan $x \to -\infty$ Seiring dengan itu dapat pula terjadi (untuk x mendekati sebarang nilai tertentu) $\lim f(x) = +L$, $\lim f(x) = -L$, $\lim f(x) = 0$, $\lim f(x) = +\infty$ atau $\lim f(x) = -\infty$. Limit sesuatu fungsi hanya mempunyai dua kemungkinan : ada (terdefinisi, tertentu; yakni jika limitnya adalah L, atau $-L$, atau 0, atau ∞ atau $-\infty$) atau tidak ada sama sekali (tidak terdefinisi), dan tidak boleh taktentu ($\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$). *)

---

*)Peringatan yang kedengarannya membingungkan ini merupakan pedoman taktis dalam menentukan limit sesuatu fungsi. Perhatikan perbedaan maksud antara istilah-istilah "ada" (terdefinisi, tertentu), "tidak ada" (tidak terdefinisi) dan "taktentu".
[Pelajari juga catatan-kaki di halaman 191 !]

Contoh :

1) $\lim\limits_{x \to -2} (1 - 2x^2) = -7$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x^2) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x^2) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x^2) = -\infty$

8.2 LIMIT SISI-KIRI, LIMIT SISI-KANAN

Analisis mengenai limit sesuatu fungsi sesungguhnya dapat dipilah menjadi dua bagian, tergantung pada dari sisi mana kita melihat gerakan perkembangan variabelnya. Apabila kita menganalisis $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih kecil daripada a (dari $x < a$), berarti kita melihatnya dari sisi kiri. Sebaliknya jika kita menganalisis $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih besar daripada a (dari $x > a$), berarti kita melihatnya dari sisi kanan. Jadi,

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$

terdiri atas

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
(analisis sisi kiri)
$x \to a$ dilihat dari nilai-nilai $x < a$ *)

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
(analisis sisi kanan)
$x \to a$ dilihat dari nilai-nilai $x > a$ *)

---

*) $x \to a^-$ maksudnya x mendekati a melalui nilai-nilai $x < a$ (dari kiri).
$x \to a^+$ maksudnya x mendekati a melalui nilai-nilai $x > a$ (dari kanan).
$a^- \neq -a$, dan $a^+ \neq +a$.

Limit sisi-kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar ($x \to a$ dari sisi-kiri, melalui nilai-nilai $x < a$). Jadi, jika

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-$ berati L^- merupakan limit sisi-kiri dari $f(x)$ untuk $x \to a$

Limit sisi-kanan dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil ($x \to a$ dari sisi kanan, melalui nilai-nilai $x > a$). Jadi, jika

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+$ berarti L^+ merupakan limit sisi-kanan dari $f(x)$ untuk $x \to a$

Limit sebuah fungsi dikatakan ada jika dan hanya jika limit sisi-kiri dan limit sisi-kanannya ada serta sama. Dalam kasus semacam ini

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Apabila salah satu dari ketentuan-ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka limit dari fungsi yang bersangkutan tidak terdefinisi. Dengan demikian limit sebuah fungsi dikatakan tidak ada jika limit salah satu sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya ada tetapi tidak sama.

Contoh :

1) $\lim_{x \to 2} (1 - 2x^2) = -7$ (terdefinisi)

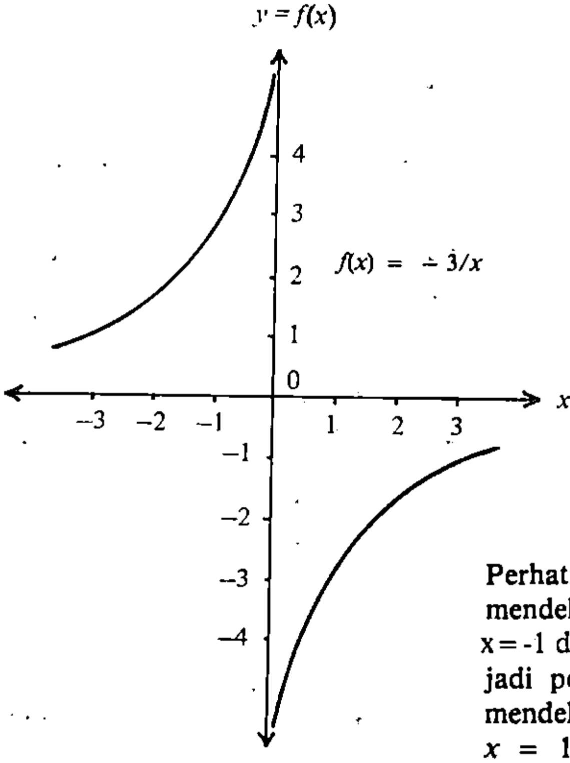
   sebab $\lim_{x \to 2^-} (1 - 2x^2) = \lim_{x \to 2^+} (1 - 2x^2) = -7$

   Apabila tabel di halaman 181 di depan diperhatikan kembali dengan seksama, akan terlihat bahwa gerakan $x \to 2$ dari kiri (dari $x = 1$; $x = 1{,}50$; $x = 1{,}90$ dan seterusnya) menyebabkan $f(x)$ mendekati nilai -7. Begitu pula gerakan $x \to 2$ dari kanan (katakanlah dari $x = 2{,}99$; $x = 2{,}95$; $x = 2{,}90$ dan seterusnya) menyebabkan $f(x)$ mendekati nilai -7.

2) Andaikan $y = f(x) = -3/x$, maka

   $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-3/x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-3/x) = -\infty$

   Karena $\lim_{x \to 0^-} (-3/x) \neq \lim_{x \to 0^+} (-3/x)$, maka $\lim_{x \to 0} (-3/x)$ tidak terdefinisi.



Gambar 8—1

Perhatikan gambar di sebelah ini. Jika x mendekati 0 dari kiri (dari $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ dan seterusnya), maka $f(x)$ akan menjadi positif tak terhingga. Tetapi jika x mendekati 0 dari kanan (dari $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$ dan seterusnya), maka $f(x)$ akan menjadi negatif tak terhingga. Itulah sebabnya untuk $x \to 0$, limit f $(-3/x)$ ini tidak terdefinisi.

Dalam Contoh 2) di atas, jika tanpa waspada kita begitu saja mensubstitusikan $x = 0$ ke dalam lim $(-3/x)$ untuk $x \to 0$, maka akan diperoleh hasil lim $(-3/x) = -\infty$; sebab untuk $x = 0$, $y = f(x) = -3/0 = -\infty$. Seakan-akan lim $(-3/x)$ untuk $x \to 0$ terdefinisi, yaitu $-\infty$; padahal pengujian limit sisi-kiri dan limit sisi-kanan secara grafik, sebagaimana diperlihatkan di atas, membuktikan bahwa lim $(-3/x)$ untuk $x \to 0$ tidak terdefinisi. Dari sini dapat disimpulkan bahwa :

> "muslihat memasukkan $x = a$ ke dalam $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tidak selalu benar !"

Moral yang lebih penting dari peringatan di atas ialah kita senantiasa harus sadar bahwa lim $f(x)$ untuk $x \to a$ bukanlah $f(a)$. Dalam kasus-kasus tertentu, penemuan matematis mengenai limit sebuah fungsi perlu diuji dengan pembuktian grafis terhadap limit sisi-kiri dan limit sisi-kanannya. Terutama jika secara matematik ditemukan hasil $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ atau $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Hal ini penting agar kita tidak "terperangkap" menyimpulkan limit yang sesungguhnya tidak terdefinisi menjadi terdefinisi (tertentu), atau menyimpulkan limit yang sesungguhnya tertentu menjadi taktentu.

Konsep limit, yang secara matematik terasa samar-samar, sebenarnya bukanlah sesuatu yang abstrak. Dalam kehidupan bisnis dan ekonomi sehari-hari konsep ini cukup sering diterapkan. Ia menggambarkan batas ideal tertentu (maksimum atau minimum) yang dapat atau harus dipenuhi, dalam kondisi yang juga ideal. Ambillah sebagai contoh tingkat upah minimum. Ini menggambarkan batas upah terendah yang harus dipenuhi. Kalaupun dalam kenyataan tingkat upah minimum yang ideal ini tidak terpenuhi, karena kondisi ideal yang mendukungnya tidak memadai, namun setidak-tidaknya upah minimum yang berlangsung akan berkisar di tingkat ideal yang diharapkan (sedikit di atasnya atau sedikit di bawahnya). Gambaran mengenai batas ideal ini dapat pula kita temui dalam hal kapasitas produksi (maksimum), profit (maksimum), biaya (minimum) dan sebagainya.

8.3 KAIDAH-KAIDAH LIMIT

1. Jika $y = f(x) = x^n$ dan $n > 0$, maka $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

   Contoh : $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\qquad \lim\limits_{x \to 5} x^3 = 5^3 = 125$

2. Limit dari suatu konstanta adalah konstanta itu sendiri.

   $$\lim_{x \to a} k =$$

   Contoh : $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$

3. Limit dari suatu penjumlahan (pengurangan) fungsi adalah jumlah (selisih) dari limit fungsi-fungsinya.

   $$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

   Contoh : $\lim\limits_{x \to 2} \{(1 - 2x^2) + (x^3)\} = \lim\limits_{x \to 2} (1 - 2x^2) + \lim\limits_{x \to 2} x^3$

   $= (1 - 2.2^2) + 2^3 = -7 + 8 = 1$

4. Limit dari suatu perkalian fungsi adalah perkalian dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh : $\lim_{x \to 2} \{(1 - 2x^2)(x^3)\} = \lim_{x \to 2} (1 - 2x^2) \cdot \lim_{x \to 2} x^3 = (-7)(8) = -56$

5. **Limit dari suatu pembagian fungsi adalah pembagian dari limit fungsi-fungsinya, dengan syarat limit fungsi pembaginya tidak sama dengan nol.**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{dengan syarat } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Contoh: $\lim_{x \to 5} \dfrac{(x^2 - 25)}{(x - 5)} = \dfrac{\lim_{x \to 5} (x^2 - 25)}{\lim_{x \to 5} (x - 5)}$

$$= \frac{\lim_{x \to 5} (x-5)(x+5)}{\lim_{x \to 5} (x - 5)} = \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$$

6. Limit dari suatu fungsi berpangkat n adalah pangkat n dari limit fungsinya.

$$\lim_{x \to a} \{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}^n$$

Contoh : $\lim_{x \to 2} (1 - 2x^2)^3 = \left\{\lim_{x \to 2} (1 - 2x^2)\right\}^3 = (-7)^3 = -343$

7. **Limit dari suatu fungsi terakar berpangkat positif adalah akar dari limit fungsinya.**

$$\lim_{x \to a} \{\sqrt[n]{f(x)}\} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \qquad n > 0$$

Contoh : $\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{(x^2 - x + 44)} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} (x^2 - x + 44)} = \sqrt[3]{64} = 4$

8. Dua buah fungsi yang serupa mempunyai limit yang sama. Jika $f(x) = g(x)$ untuk semua nilai $x \neq a$ dan $\lim_{x \to a} f(x) = L$, maka $\lim_{x \to a} g(x) = L$ juga

8.4 PENYELESAIAN KASUS-KASUS KHUSUS

Dalam Sub-bab 8.1 ditegaskan bahwa limit sesuatu fungsi tidak boleh taktentu. Ini berarti penentuan limit sesuatu fungsi tidak boleh membuahkan hasil berbentuk 0/0 atau ∞/∞. Sub-bab ini akan membahas kaidah-kaidah khusus yang dapat diterapkan guna menghindari hasil berbentuk tak tentu tersebut.

8.4.1 Bentuk Taktentu 0/0

Perhatikan contoh pada kaidah ke-5 (limit pembagian fungsi) di atas, $y = f(x)/g(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$. Jika terhadap lim $\{(x^2 - 25)(x - 5)\}$ untuk $x \to 5$ kita begitu saja mensubstitusikan $x = 5$, maka akan diperoleh hasil taktentu 0/0. Ini disebabkan karena $y = (x^2 - 25)/(x - 5) = 0/0$ jika $x = 5$. Sehubungan dengan itu kita senantiasa harus waspada bahwa $x \to 5$ bukanlah berarti $x = 5$! Selanjutnya perhatikan : jika $x \neq 5$ maka $y \neq 0/0$, kedua pembilang $(x^2 - 25)$ dan penyebut $(x - 5)$ dapat dibagi dengan $(x - 5)$, sehingga $y = (x^2 - 25)/(x - 5)$ dapat diuraikan menjadi $y = (x - 5)(x + 5)/(x - 5) = (x + 5)$.

Mengingat $x \to 5$ adalah $x \neq 5$, maka lim $\{(x^2 - 25)/(x - 5)\}$ untuk $x \to 5$ dapat diuraikan seperti di atas dan tersederhana menjadi hanya lim $(x + 5)$ untuk $x \to 5$, Jadi, limit yang menghasilkan bentuk taktentu 0/0 dapat dihindari dengan cara mengurai-sederhanakan fungsinya. Perhatikan contoh lain berikut ini.

Andaikan $f(x) = \{(x - 3)^2 - 9\}/x$. Berapa lim $f(x)$ untuk $x \to 0$? Substitusi langsung $x = 0$ ke dalam lim $f(x)$ untuk $x \to 0$ akan menghasilkan bentuk tak tentu 0/0, sebab $f(x) = 0/0$ jika $x = 0$. Namun jika $x \neq 0$, $f(x) \neq 0/0$ dan dapat diurai-sederhanakan menjadi $f(x) = (x^2 - 6x + 9 - 9)/x = (x^2 - 6x)/x = x - 6$. Dengan demikian

$$\lim_{x \to 0} [\{(x-3)^2 - 9\}/x] = \lim_{x \to 0} (x - 6) = -6$$

8.4.2 Bentuk Taktentu ∞/∞

Bentuk taktentu ∞/∞ dapat terjadi dalam kasus penentuan limit pembagian fungsi [katakanlah lim $\{f(x)/g(x)\}$] untuk variabel $x \to \infty$. Hasil ∞/∞, yang potensial untuk terjadi, dapat dihindari dengan cara membagi pembilang dan penyebutnya dengan variabel berpangkat tertinggi pada penyebut.

Contoh :

1) Andaikan $y(x) = f(x)/g(x) = (4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ dan kita ingin mengetahui lim $y(x)$ untuk $x \to \infty$.

Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan x^6, diperoleh

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^5 + x^2}{3x^6 + 7x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{4/x + 1/x^4}{3 + 7/x^3} = \frac{0 + 0}{3 + 0} = 0$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 + x^2 + 9}{2x^3 + 5x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6 + 1/x + 9/x^3}{2 + 5/x - 4/x^3} = \frac{6 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = 3$$

8.4.3 Penyelesaian Pintas Limit Fungsi-Pembagian untuk $x \to \infty$

Selain dengan cara yang baru saja ditunjukkan di atas, terdapat cara yang lebih singkat dalam menentukan $\lim\{f(x)/g(x)\}$ untuk $x \to \infty$. Penyelesaian pintas ini dilakukan dengan cara memperbandingkan suku-suku berpangkat tertinggi pada pembilang dan penyebut.

Jika $$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j}$$

di mana $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing merupakan fungsi polinom berderajat m dan berderajat n,

maka

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \begin{cases} = 0 & \text{dalam hal } m < n \\ = a_m / b_n & \text{dalam hal } m = n \\ = +\infty & \text{dalam hal } m > n \text{ dan } a_m > 0 \\ = -\infty & \text{dalam hal } m > n \text{ dan } a_m < 0 \end{cases}$$

Perhatian : Kaidah ini berlaku hanya jika $y(x)$ merupakan fungsi pembagian dan limitnya ditentukan untuk $x \to \infty$.

Contoh :

1) $y(x) = (4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ merupakan sebuah fungsi pembagian; di mana $m = 5$, $n = 6$, $a_m = 4$ dan $b_n = 3$.
   Karena $m < n$, maka $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$
   [Bandingkan dengan Contoh 1) dalam seksi sebelum ini, hasilnya sama].

2) Tentukan limit $y(x)$ untuk $x \to \infty$ jika $y(x) = (6x^3 + x^2 + 9)/(2x^3 + 5x^2 - 4)$

$$\left.\begin{array}{ll} m = 3, & n = 3 \\ a_m = 6, & b_n = 2 \end{array}\right\} m = n, \text{ maka } \lim_{x \to \infty} y(x) = \frac{a_m}{b_n} = \frac{6}{2} = 3$$

[Bandingkan dengan Contoh 2) dalam seksi sebelum ini, hasilnya sama].

3) $\lim_{x \to \infty} \{(x^2 - 25)/(x - 5)\} = \infty$ sebab $m > n$ dan $a_m > 0$

4) $\lim_{x \to \infty} \{(25 - x^2)/(x - 5)\} = -\infty$ sebab $m > n$ dan $a_m < 0$

Latihan Limit

Tentukan :

1. $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x \to 3} (3x^4 - 2x^2 + 4x + 5)$
3. $\lim_{x \to 4} \{(2x - 3) + (x + 1)\}$
4. $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1}$
5. $\lim_{x \to 9} (\sqrt{x} + 5)$
6. $\lim_{x \to 1} \{(3x^2 - 5x)(6x + 2)\}$
7. $\lim_{x \to 5} \left(\frac{x - 1}{x - 3}\right)$
8. $\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 49}{x - 7}\right)$
9. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$
10. $\lim_{x \to 1} 5 \left(\frac{2x^3 - 2x}{x^2 - 1}\right)$
11. $\lim_{x \to 0,5} (x^3 - 4x)^2$
12. $\lim_{x \to 6} \sqrt[3]{x^2 - 9}$
13. $\lim_{m \to 0} \left(\frac{m + n}{m - n}\right)$
14. $\lim_{m \to \infty} e^{-m}$
15. $\lim_{m \to 0} \left(\frac{2e^x + e^{-x}}{3}\right)$
16. $\lim_{x \to 2} 4x^{-3}$
17. $\lim_{r \to -1} \left(\frac{r^2 - r + 4}{r^2 + 1}\right)$
18. $\lim_{r \to \infty} \left(\frac{r^2 - r + 4}{r^2 + 1}\right)$
19. $\lim_{x \to -\infty} (1 + 2^{1/x})^{-1}$
20. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 12}{4x^2 + 12x}\right)$

8.5 KESINAMBUNGAN

Perihal kesinambungan dan ketidaksinambungan fungsi merupakan konsep dasar penting dalam kalkulus. Konsep kesinambungan bertalian erat dengan konsep limit. Secara visual, sebuah fungsi dikatakan sinambung (*continuous*) apabila gambarnya berupa sebuah kurva yang tidak terputus; yakni jika dalam menggambarkan kurva tersebut kita tidak perlu mengangkat alat tulis, melainkan cukup dengan menggeserkannya ke arah yang bersesuaian. Apabila dalam melanjutkan penggambaran kurva sebuah fungsi kita terpaksa harus mengangkat alat tulis pada titik tertentu, maka fungsi yang bersangkutan dikatakan asinambung (*discontinuous*) atau terputus pada titik tersebut.

Dalam uraian-uraian sebelum ini telah ditegaskan bahwa lim $f(x)$ untuk $x \to a$ bukanlah berarti $f(x)$ pada $x = a$. Dalam menentukan lim $f(x)$ untuk $x \to a$, kita tidak menetapkan berapa nilai $f(x)$ pada $x = a$. Dengan perkataan lain, limit tersebut sesungguhnya ditentukan oleh nilai-nilai $f(x)$ di sekitar (yang berdekatan dengan) $x = a$, tetapi bukan oleh nilai $f(x)$ pada $x = a$ itu sendiri. Limit fungsi $f(x)$ untuk $x \to a$ dapat sama dan dapat pula tidak sama dengan $f(a)$. Apabila lim $f(x)$ untuk $x \to a$ terdefinisi, dan $f(x)$ pada $x = a$ [atau $f(a)$] juga terdefinisi serta sama dengan lim $f(x)$ untuk $x \to a$, maka fungsi $f(x)$ dikatakan sinambung pada titik di mana $x = a$. Jadi,

sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan sinambung pada $x = a$ jika

1. $f(a)$ terdefinisi
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ terdefinisi
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Fungsi $f(x)$ dikatakan sinambung dalam suatu interval $b \leqslant x \leqslant c$ (atau interval $b < x < c$) jika ia sinambung pada setiap titik di dalam interval tersebut.

Fungsi $f(x)$ yang tidak sinambung pada suatu titik di mana $x = a$ dikatakan asinambung pada $x = a$.

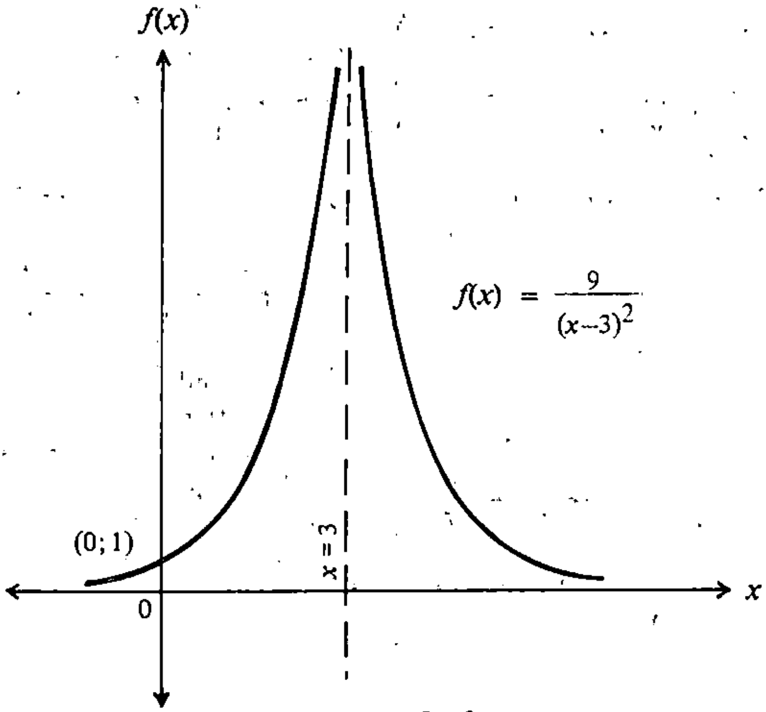
Ketidaksinambungan sebuah fungsi dapat berbentuk salah satu dari tiga kemungkinan : asinambung tak berhingga, asinambung berhingga dan asinambung titik. Secara geometri, penampilan kurva dari fungsi-fungsi yang berlainan bentuk ketidaksinambungannya ini sangat berbeda.

- Fungsi $f(x)$ dikatakan asinambung tak berhingga pada $x = a$ jika $f(x)$ menjadi (positif atau negatif) tak terhingga untuk $x \to a$; yakni jika $f(a)$ dan lim $f(x)$ untuk $x \to a$ tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung tak berhingga pada $x = a$ mendekati $x = a$ sebagai sebuah asimtot.

Contoh :

Fungsi $f(x) = 9/(x - 3)^2$ asinambung tak berhingga pada $x = 3$ sebab $f(3)$ dan $\lim_{x \to 3} f(x)$ untuk $x \to 3$ tidak terdefinisi; dalam hal ini $f(3) = \infty$ dan $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$.*)

Fungsi ini sinambung pada semua nilai x selain $x = 3$. Kurvanya asimtotik pada $x = 3$ (lihat Gambar 8-2).



Gambar 8—2

• Fungsi $f(x)$ dikatakan asinambung berhingga pada $x = a$ jika $f(x)$ terdefinisi tapi berubah secara drastik pada $x = a$; yakni jika $f(a)$ terdefinisi dan $\lim f(x)$ untuk $x \to a$ tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung berhingga pada $x = a$ mempunyai dua macam nilai $f(a)$ untuk $x \to a$ yakni limit masing-masing sisinya.

---

*)Jika kita mengatakan limit sesuatu fungsi terdefinisi, haruslah berarti bahwa limit tersebut terdefinisi secara tegas ! Meskipun $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dapat ditafsirkan sebagai terdefinisi, namun sesungguhnya ia terdefinisi secara tidak tegas, karenanya hasil limit yang demikian lebih tepat dikategorikan sebagai tidak terdefinisi. Sesungguhnya tanda ∞ bukanlah sebuah bilangan dan tidak boleh diperhitungkan sebagai sebuah bilangan walaupun dalam beberapa hal (karena pertimbangan praktis) ia sering dianggap sebagai sebuah bilangan (bilangan yang amat sangat besar).

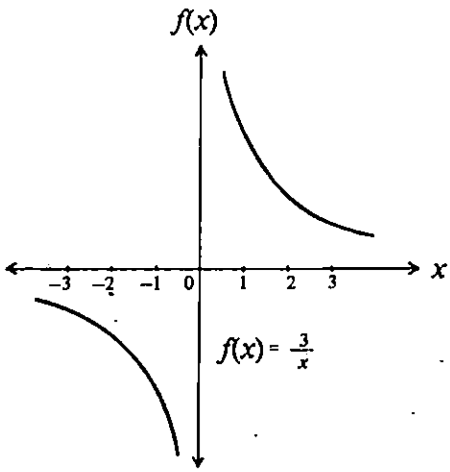
Contoh :

Fungsi $f(x) = 3/x$ asinambung berhingga pada $x = 0$ sebab $f(x)$ terdefinisi tapi berubah secara drastik pada $x = 0$, karena lim $f(x)$ untuk $x \to 0$ tidak terdefinisi.

$f(0) = 3/0 = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3/x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3/x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Karena limit sisi-kiri} \neq \text{limit sisi kanan maka } \lim\limits_{x \to 0} f(x) \text{ tidak terdefinisi}$$

Perhatikan nilai $f(x)$ untuk nilai-nilai x tertentu berikut ini dan Gambar 8-3.



Gambar 8 — 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	$-1{,}5$	-3	∞	3	$1{,}5$	1

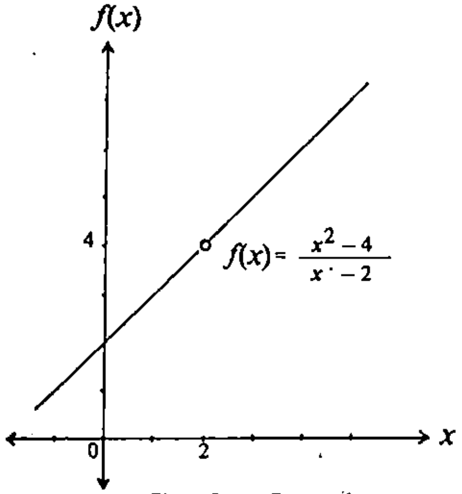
Amati gambar di sebelah; $f(x)$ menuju $-\infty$ untuk $x \to 0$ dari sisi kiri, tetapi menuju $+\infty$ untuk $x \to 0$ dari sisi kanan terdapat perubahan drastis nilai $f(x)$ pada $x = 0$.

Ciri khas dari fungsi yang memiliki ketidaksinambungan berhingga (*finite discontinuity*) adalah bahwa nilai fungsinya sama dengan limit salah satu sisinya. Dalam contoh di atas, nilai $f(0)$ sama dengan lim $f(x)$ untuk $x \to 0$ dari sisi kanan, yakni sama-sama $+\infty$.

- Fungsi $f(x)$ dikatakan asinambung titik pada $x = a$ jika $f(a)$ tidak terdefinisi tapi lim $f(x)$ untuk $x \to a$ terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung titik pada $x = a$ tampak seakan-akan sinambung, namun sesungguhnya terputus karena pada $x = a$ tersebut $f(x)$ tidak terdefinisi. Titik di mana $f(x)$ tidak terdefinisi dinamakan "titik-yang-hilang" dalam fungsi yang bersangkutan.

Contoh :

1) Fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ asinambung titik pada $x = 2$ sebab $f(2)$ tidak terdefinisi tapi lim $f(x)$ untuk $x \to 2$ terdefinisi.



Gambar 8 — 4

$f(2) = (4 - 4)/(2 - 2) = 0/0 =$ tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq 2$, $f(x)$ bisa disederhanakan menjadi $f(x) = (x + 2)(x - 2)/(x - 2) = (x + 2)$ sehingga

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Kurva dari fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ tak lain adalah garis lurus $(x + 2)$.

Perhatikan Gambar 8—4, kurva $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ terputus pada kedudukan $x = 2$. Hal ini disebabkan karena tidak terdefinisinya $f(2)$. Titik (2, 4) merupakan titik-yang-hilang dalam $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$.

2) Fungsi $f(x) = (2x^2 - 32)/(x + 4)$ asinambung titik pada $x = -4$ sebab $f(-4)$ tidak terdefinisi tapi $\lim f(x)$ untuk $x \to -4$ terdefinisi.
$f(-4) = (32 - 32)/(-4 + 4) =$ tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq -4$, $f(x)$ bisa disederhanakan menjadi $f(x) = (2x - 8)(x + 4)/(x + 4) = (2x - 8)$.

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{(2x^2 - 32)}{(x + 4)} = \lim_{x \to -4} \frac{(2x - 8)(x + 4)}{(x + 4)} = -16$$

Kurva dari fungsi $f(x) = (2x^2 - 32)/(x + 4)$ tak lain adalah garis lurus $(2x - 8)$ dengan titik $(-4, -16)$ sebagai titik-yang-hilang. Pembaca perlu membuktikan hal ini dengan cara mencoba menggambarkan sendiri kurvanya; substitusikan nilai-nilai (misalnya) $x = -7, -6, -5, -4{,}5, -4, -3{,}5, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ ke dalam persamaan $f(x) = (2x^2 - 32)/(x + 4)$!

Latihan Kesinambungan

Tentukan apakah fungsi-fungsi $f(x)$ berikut sinambung untuk semua nilai x ataukah asinambung pada kedudukan x tertentu. Jika asinambung, jelaskan bentuk ketidaksinambungannya.

1. $f(x) = 18x^3 - 24x^2 - 10x$
2. $f(x) = (x^2 - 49)/(x + 7)$
3. $f(x) = (2x^2 - 1/8)/(x - ¼)$

4. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x - 3)$
5. $f(x) = 18/(x - 4)^2$
6. $f(x) = (2e^x + e^{-x})/3$
7. $f(x) = x^{-1}$
8. $f(x) = 2x/(3 - x)$
9. $f(x) = (x^3 - 3x^2 - 2x + 6)/(x - 3)$
10. $f(x) = 5e^{-x}$

8.6 PENERAPAN EKONOMI

Fungsi-fungsi dalam bisnis dan ekonomi banyak yang berbentuk fungsi asinambung. Bahkan sesungguhnya sebagian besar dari fungsi yang ada merupakan fungsi asinambung, terutama fungsi permintaan dan fungsi penawaran untuk jenis-jenis barang tertentu yang unit atau satuannya selalu diskrit (berupa bilangan bulat, tidak mungkin dipecah-pecah). Begitu pula fungsi biaya dan fungsi penerimaannya. Penyinambungan fungsi-fungsi yang sesungguhnya asinambung atau diskrit memungkinkannya untuk ditelaah dengan berbagai alat analisis matematik. Namun demikian, dalam menafsirkan hasil analisisnya, kita harus senantiasa mengingat ketidaksinambungan yang tersirat. Sebagai contoh : meskipun secara matematik kita dapat menunjukkan berapa biaya untuk memproduksi 325,6 unit mobil, secara ekonomi yang harus kita permasalahkan adalah biaya untuk memproduksi 325 (atau 326) unit mobil. Berikut ini ditunjukkan beberapa kasus fungsi asinambung dalam bisnis dan ekonomi.

Kasus 39

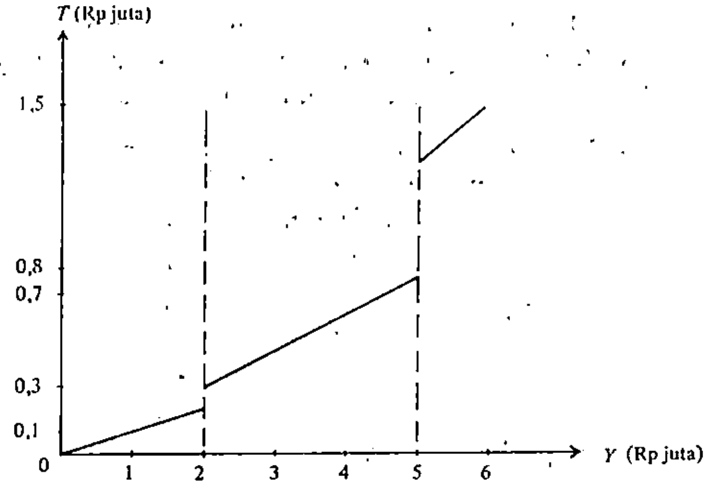
Andaikan pemerintah menetapkan sistem pajak-pendapatan progresif dengan ketentuan sebagai berikut :

10% atas pendapatan di bawah Rp 2 juta per tahun
15% atas pendapatan antara Rp 2 — 5 juta per tahun
25% atas pendapatan melebihi Rp 5 juta per tahun.

Apabila pendapatan kita lambangkan dengan Y dan jumlah pajak yang dibayarkan adalah T, maka fungsi pajak pendapatannya dapat dituliskan sebagai :

$$T \begin{cases} = 0,10\,Y & 0 \leq Y < 2 \\ = 0,15\,Y & 2 \leq Y \leq 5 \\ = 0,25\,Y & Y > 5 \end{cases}$$

Kurvanya ditunjukkan oleh Gambar 8-5. Perhatikan bahwa kurvanya asinambung di dua tempat, pada Y = 1,9999..... dan pada Y = 5,000..... 1.



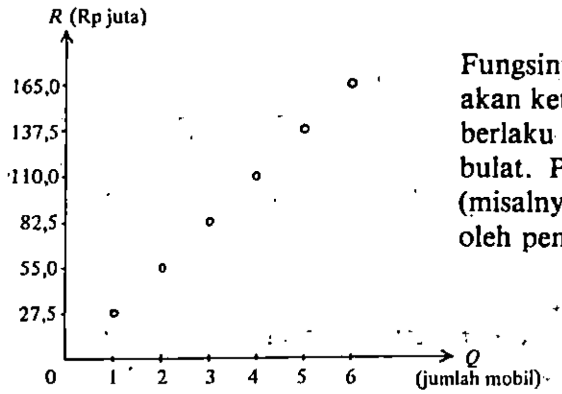
Gambar 8 — 5

Kasus 40

Andaikan harga jual sebuah mobil Rp 27,5 juta. Jika Q melambangkan jumlah mobil yang terjual dan R melambangkan penerimaan penjualan dalam jutaan rupiah, fungsi penerimaannya dapat dituliskan sebagai :

$R = 27{,}5\ Q$ untuk $Q = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

dan secara grafik ditunjukkan oleh Gambar 8-6 berikut.



Gambar 8—6

Fungsinya diskrit, dalam hal ini sarat akan ketidaksinambungan, mengingat Q berlaku hanya untuk bilangan-bilangan bulat. Penjual tidak mungkin menjual (misalnya) 3,5 buah mobil atau memperoleh penerimaan sebesar Rp 96,25 juta.

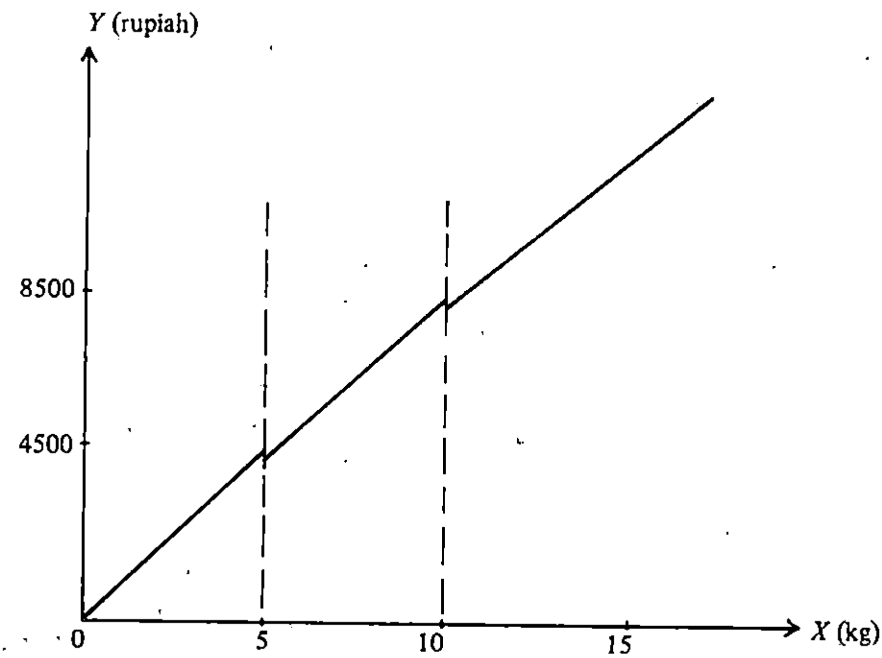
Kasus 41

Seorang pedagang menjalankan kebijakan diskriminasi harga dalam penjualan jeruk dengan termin sebagai berikut :

Rp 900,00 per kg untuk pembelian sebanyak 5 kg atau kurang
Rp 850,00 per kg untuk pembelian lebih dari 5 kg tapi tak lebih dari 10 kg
Rp 750,00 per kg untuk pembelian lebih dari 10 kg.

Apabila harga total (= penerimaan bagi penjual atau pengeluaran bagi pembeli) dilambangkan dengan Y dan jumlah jeruk dalam kilogram dilambangkan dengan X, maka fungsinya dapat dituliskan sebagai :

$$Y \begin{cases} = 900X & 0 \leqslant X \leqslant 5 \\ = 850X & 5 < X \leqslant 10 \\ = 750X & X < 10 \end{cases}$$



Gambar 8—7

Dengan kebijakan harga semacam ini (pembedaan harga berdasarkan jumlah pembelian, dalam ekonomi mikro disebut diskriminasi harga derajat kedua), penjual dapat merangsang pembeli untuk membeli lebih banyak. Dalam kasus ini membeli jeruk 11 kg lebih murah daripada membeli 10 kg.

BAB 9
DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat pula disidik kedudukan-kedudukan khusus dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok dan titik minimumnya — jika ada. Berdasarkan manfaat-manfaatnya inilah konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang sangat penting dalam bisnis dan ekonomi. Sebagaimana diketahui, analisis dalam bisnis dan ekonomi sangat akrab dengan masalah perubahan, penentuan tingkat maksimum dan tingkat minimum.

Bab ini membahas diferensial yang menyangkut fungsi yang mengandung hanya satu variabel bebas dalam persamaannya. Pengertian diferensiasi, hakekat derivatif, kaidah-kaidah diferensial, penggunaannya dalam penyidikan titik ekstrim sebuah fungsi dan penerapan ekonominya diuraikan di sini. Diferensial untuk fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas (fungsi majemuk) diuraikan tersendiri di dalam bab sesudah ini.

9.1 KUOSIEN DIFERENSI DAN DERIVATIF

Jika $y = f(x)$ dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δx (baca : "delta x"), maka bentuk persamaannya dapat dituliskan menjadi :

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\
\Delta y &= f(x + \Delta x) - y \\
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)
\end{aligned}
$$

di mana Δx adalah tambahan x, dan Δy adalah tambahan y berkenaan dengan adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx. Apabila ruas kiri dan ruas kanan persamaan terakhir di atas sama-sama dibagi Δx, maka diperoleh :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk $\Delta y/\Delta x$ inilah yang disebut dengan hasilbagi perbedaan atau kuosien diferensi (*difference quotient*), mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap variabel bebas x.

Contoh :

Tentukan kuosien diferensi dari $y = f(x) = 3x^2 - x$.

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2 - x \\
y + \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) \\
y + \Delta y &= 3\{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\} - x - \Delta x \\
y + \Delta y &= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x \\
\Delta y &= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - y \\
\Delta y &= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 3x^2 + x \\
\Delta y &= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - \Delta x
\end{aligned}
$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 1$$

Proses penurunan sebuah fungsi, disebut juga proses pendiferensian atau diferensiasi, pada dasarnya merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensi dalam hal pertambahan variabel bebasnya sangat kecil atau mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derivatif (*derivative*). Dengan demikian,

jika $y = f(x)$
maka kuosien diferensinya $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

dan turunan fungsinya $\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Contoh :

Dari persamaan $y = 3x^2 - x$
diperoleh kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x = 6x + 3\Delta x - 1$
(periksa kembali contoh kuosien diferensi sebelumnya)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 1) = 6x + 3(0) - 1 = 6x - 1$$

Jadi, turunan atau derivatif dari fungsi $y = 3x^2 - x$ adalah

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 1.$$

Cara menuliskan turunan dari sesuatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa macam notasi atau lambang. Jika fungsi aslinya $y = f(x)$, maka turunannya dapat dituliskan dengan notasi-notasi :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Semua cara penulisan di atas sama arti dan maksudnya, yaitu melambangkan turunan dari $y = f(x)$ terhadap x. Dalam hal Δx sangat kecil, $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ itu sendiri, sehingga :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d\,f(x)}{dx} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dengan perkataan lain, turunan dari fungsi yang bersangkutan adalah kuosien diferensinya sendiri. Sedangkan kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$ tak lain adalah lereng *(slope)* dari garis atau kurva $y = f(x)$.

Dari berbagai macam notasi turunan fungsi yang ditunjukkan di atas, yang paling lazim digunakan ialah bentuk dy/dx (baca : "deye deeks", dan bukan "deye bagi deeks" !).

9.2 KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIASI

Secara umum, membentuk turunan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan cara terlebih dahulu menemukan kuosien diferensinya, kemudian menentukan limit kuosien diferensi tersebut untuk pertambahan variabel bebas mendekati nol. Jelasnya, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Andaikan fungsi aslinya ialah $y = f(x)$
2. Masukkan tambahan x dan tambahan y untuk memperoleh
   $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

3. Manipulasikan untuk memperoleh

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

4. Bagi kedua ruas dengan Δx sehingga diperoleh kuosien diferensinya

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5. Tentukan limitnya untuk $\Delta x \to 0$, sehingga diperoleh turunan fungsinya

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[Perhatikan kedua contoh dalam Sub-bab 9.1 di depan secara berurutan].

Prosedur di atas jelas membosankan dan cenderung membuahkan hasil yang tak seharusnya, terutama untuk fungsi-fungsi yang tidak sederhana. Berikut ini disajikan sejumlah kaidah yang dapat digunakan untuk menurunkan berbagai bentuk fungsi tertentu.

1. Diferensiasi konstanta

Jika $y = k$, di mana k adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Contoh : $y = 5$, $\quad \frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensiasi fungsi pangkat

Jika $y = x^n$, di mana n adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Contoh : $y = x^3$, $\quad \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$

3. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

Jika $y = kv$, di mana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = k\frac{dv}{dx}$

Contoh : $y = 5x^3$, $\quad \frac{dy}{dx} = 5(3x^2) = 15x^2$

4. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

Jika $y = \frac{k}{v}$, di mana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{k\,dv/dx}{v^2}$

Contoh : $y = \frac{5}{x^3}$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{5(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{15x^2}{x^6}$

5. Diferensiasi penjumlahan (pengurangan) fungsi

Jika $y = u \pm v$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,

maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

Contoh :

$y = 4x^2 + x^3$

misalkan $u = 4x^2 \rightarrow du/dx = 8x$
$v = x^3 \rightarrow dv/dx = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$
$$= 8x + 3x^2$$

6. Diferensiasi perkalian fungsi

Jika $y = uv$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,

maka $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^2)(x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= (4x^2)(3x^2) + (x^3)(8x) = 12x^4 + 8x^4 = 20x^4$$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

Jika $y = \dfrac{u}{v}$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Contoh : $y = \dfrac{4x^2}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{8x^4 - 12x^4}{x^6} = \frac{-4}{x^2} = -4x^{-2}$$

8. Diferensiasi fungsi komposit

Jika $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$, dengan kata lain $y = f\{g(x)\}$

maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^3 + 5)^2$ misalkan $u = 4x^3 + 5$, sehingga $y = u^2$

$du/dx = 12x^2$ $dy/du = 2u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 2u(12x^2) = 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 + 120x^2$$

9. Diferensiasi fungsi berpangkat

Jika $y = u^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

maka $\dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^3 + 5)^2$ misalkan $u = 4x^3 + 5 \rightarrow du/dx = 12x^2$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 + 120x^2$$

Kaidah ke-9 ini mirip dengan kaidah ke-8, dan memang merupakan kasus khusus dari kaidah ke-8. Untuk kaidah ke-9 ini terdapat pula sebuah kasus khusus; yakni jika $u = f(x) = x$, sehingga $y = u^n = x^n$, maka $dy/dx = nu^{n-1}$ (yang tak lain adalah kaidah ke-2).

10. Diferensiasi fungsi logaritmik

Jika $y = {}^a\log x$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a}$

Contoh : $y = {}^5\log 2$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{1}{2 \ln 5}$

11. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik

Jika $y = {}^a\log u$, di mana $u = g(x)$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{{}^a\log e}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Contoh : $y = \log \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

$$\text{misalkan } u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{\log e}{\left(\frac{x-3}{x+2}\right)} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5 \log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5 \log e}{(x^2-x-6)}$$

12. **Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-berpangkat**
    Jika $y = ({}^a\log u)^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{{}^a\log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh : $y = (\log 5x^2)^3$

$$\text{misalkan } u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log 5x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5x^2}\right)(10x)$$

$$= \frac{30x(\log 5x^2)^2 \log e}{5x^2} = \frac{6}{x}(\log 5x^2)^2 \log e$$

13. **Diferensiasi fungsi logaritmik-Napier**

Jika $y = \ln x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Contoh : $y = \ln 5$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$

Kaidah ini merupakan kasus khusus dari kaidah ke-10, yakni dalam hal logaritmanya berbasis e. Ingat, bahwa $\ln x \equiv {}^e\log x$ dan $\ln e \equiv {}^e\log e = 1$. Jadi, jika $y = \ln x = {}^e\log x$, maka $dy/dx = 1/x \ln e = 1/x$.
Kaidah ke-14 dan ke-15 berikut ini masing-masing merupakan kasus khusus dari kaidah ke-11 dan ke-12, untuk alasan yang sama.

14. **Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-Napier**

Jika $y = \ln u$, di mana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = \ln \left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

$$\text{misalkan } u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)}{(x-3)} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x^2-x-6)}$$

15. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-Napier-berpangkat

Jika $y = (\ln u)^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh : $y = (\ln 5x^2)^3$ misalkan $u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2}\right)(10x) = \frac{6}{x}(\ln 5x^2)^2$$

16. Diferensiasi fungsi eksponensial

Jika $y = a^x$, di mana a adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

Contoh : $y = 5^x$; $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a = 5^x \ln 5$

Dalam hal $y = e^x$, maka $dy/dx = e^x$ juga, sebab $\ln e = 1$.

17. Diferensiasi fungsi komposit-eksponensial

Jika $y = a^u$, di mana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = 9^{3x^2-4}$ misalkan $u = 3x^2 - 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$= 9^{3x^2-4}(\ln 9)(6x) = (6x)\, 9^{3x^2-4} \ln 9$$

Kasus khusus : dalam hal $y = e^u$, maka $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

Kaidah ke-16 sebelumnya sesungguhnya juga merupakan kasus khusus dari kaidah ke-17 ini, yakni dalam hal $u = g(x) = x$.

18. Diferensiasi fungsi kompleks

Jika $y = u^v$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$

Penentuan dy/dx dari $y = u^v$ ini dapat pula dilakukan dengan jalan melogaritmakan fungsi atau persamaannya, kemudian mendiferensiasikan masing-masing ruasnya. Perhatikan :

$$y = u^v$$
$$\ln y = v \ln u$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(v \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right) u^v \qquad \text{mengingat } y = u^v$$
$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$$

Berbagai fungsi aljabar yang kompleks bisa lebih mudah didiferensiasikan dengan langkah-langkah seperti di atas.

Contoh :

1) $y = 4x^{x^3}$
misalkan $u = 4x \rightarrow du/dx = 4$
$v = x^3 \rightarrow dv/dx = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= (x^3)\, 4x^{x^3-1}\, (4) + 4x^{x^3} \ln 4x\, (3x^2)$$
$$= 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2} \ln 4x$$
$$= 4x^{x^3+2}(4 + 3 \ln 4x)$$

2) $y = x^{(x^2+1)^3}$
misalkan $u = x \rightarrow du/dx = 1$
$v = (x^2 + 1)^3 \rightarrow dv/dx = 6x(x^2 + 1)^2$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= (x^2 + 1)^3 x^{(x^2+1)^3-1}(1) + x^{(x^2+1)^3} \ln x \,\{6x(x^2 + 1)^2\}$$
$$= (x^2 + 1)^3 x^{(x^2+1)^3-1} + 6x^{(x^2+1)^3+1}(x^2 + 1)^2 \ln x$$

$$= (x^2 + 1)^2 x^{(x^2+1)^3+1} \{(x^2 + 1) x^{-2} + 6 \ln x\}$$

3) $y = x^{e^{2x}}$

misalkan $u = x \rightarrow du/dx = 1$

$v = e^{2x} \rightarrow dv/dx = 2e^{2x}$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$= e^{2x} x^{e^{2x}-1} (1) + x^{e^{2x}} \ln x (2e^{2x})$$

$$= x^{e^{2x}-1} e^{2x} (1 + 2x \ln x)$$

19. Diferensiasi fungsi balikan

Jika $y = f(x)$ dan $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan (*inverse functions*), maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$

Contoh :

1) $x = 5y + 0{,}5y^4$

$$\frac{dx}{dy} = 5 + 2y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = 1/(5 + 2y^3)$$

2) $x = \ln(2y^3 + y^2)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{6y^2 + 2y}{2y^3 + y^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{2y^3 + y^2}{6y^2 + 2y} = \frac{2y^2 + y}{6y + 2}$$

20. Diferensiasi implisit

Jika $f(x, y) = 0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikannya suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x.

Contoh :

1) $4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan dy/dx !

$$8xy \frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8xy + 2) \frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$$

Dalam contoh ini $4\,xy^2$ diperlakukan sebagai perkalian dua buah fungsi x, kemudian didiferensiasikan dengan menggunakan kaidah perkalian fungsi (kaidah ke-6). Jadi, $u = 4\,x$ dan $v = y^2$, diperoleh $du/dx = 4$ dan $dv/dx = 2\,y(dy/dx)$, sehingga $d(uv)/dx = u(dv/dx) + v(du/dx) = 8\,xy(dy/dx) + 4\,y^2$. Adapun dy/dx dari $-x^2$ ialah $-2\,x$, sedangkan dy/dx dari $2\,y$ ialah $2(dy/dx)$.

2) $x^2 y - e^x - e^y = 5$, tentukan dy/dx !

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2\,xy - e^x - e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 - e^y) \frac{dy}{dx} = e^x - 2\,xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 2\,xy}{x^2 - e^y}$$

Selain keduapuluh kaidah yang diuraikan di atas, masih terdapat beberapa kaidah lagi yang tidak dibahas di dalam buku ini, yaitu kaidah-kaidah diferensiasi untuk fungsi trigonometrik dan fungsi hiperbolik.

Latihan Diferensiasi Dasar

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi di bawah ini.

1. $y = 2\,x^3 - 4\,x^2 + 7\,x - 5$
2. $y = 9 - 3\,x^{-1} + 6\,x^{-2}$
3. $y = (x^2 - 4)(2\,x - 6)$
4. $y = (3\,x^2 - x)(2 + x^{-1})$
5. $y = \dfrac{x^2 - 4}{2\,x - 6}$
6. $y = (3\,x^2 - x)\left(\dfrac{5\,x + 2}{x}\right)$
7. $y = (5\,x + 12 - 2\,x^{-1})^3$
8. $y = \left(\dfrac{5\,x + 2}{x}\right)^2$

9. $y = \log \left(\dfrac{x + 2}{x - 3} \right)$

10. $y = \log (x^2 - 7)^3$

11. $y = \ln \left(\dfrac{x + 2}{x - 3} \right)$

12. $y = (\ln 4 x^3)^2$

13. $y = 10^x e^{x^2}$

14. $y = \dfrac{\ln 2 x}{e^x}$

15. $y = x^2 e^{x^2 + 5x - 3}$

16. $y = 2 x e^{2x}$

17. $x = 4 y + 8 - y^{-2}$

18. $x = \ln (5 y^2 - 4 y)$

19. $xy - x^2 + y^2 = -87$

20. $exy^2 - e^{-x} + e^{2y} = 0$

9.3 HAKEKAT DERIVATIF DAN DIFERENSIAL

Dalam Sub-bab 9.1 telah dijelaskan perbedaan, sekaligus kesamaan, antara kuosien diferensi dan derivatif sebuah fungsi. Kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$ tak lain adalah lereng dari kurva $y = f(x)$. Sedangkan derivatif dy/dx adalah lim $(\Delta y/\Delta x)$ untuk $\Delta x \rightarrow 0$. Jika Δx sangat kecil, $\lim\limits_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y/\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ itu sendiri, dengan perkataan lain derivatif fungsi yang bersangkutan sama dengan kuosien diferensinya ($dy/dx = \Delta y/\Delta x$). Jadi, untuk Δx yang sangat kecil, derivatif (seperti halnya kuosien diferensi) juga mencerminkan lereng dari kurva $y = f(x)$. Uraian mengenai diferensial berikut ini akan semakin memperjelas makna tentang derivatif, serta mempertajam pemahaman akan ketiga konsep yang saling berkaitan : kuosien diferensi, derivatif dan diferensial.

Notasi derivatif dy/dx sesungguhnya terdiri atas dua suku, yaitu dy dan dx. Suku dy dinamakan diferensial dari y, sedangkan dx merupakan diferensial dari x. Diferensial dari x (dx) mencerminkan perubahan sangat kecil pada variabel bebas x.

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

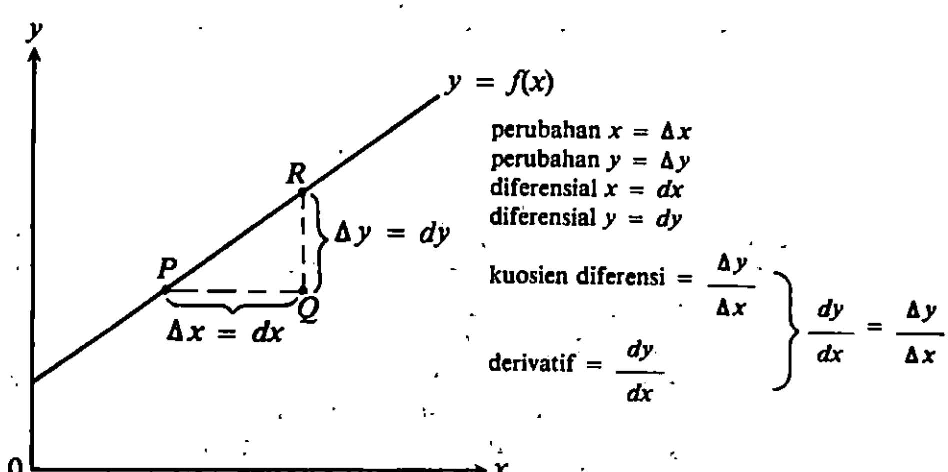
$$\text{diferensial dari } x: \quad dx = \Delta x$$

Adapun diferensial dari $y(dy)$ mencerminkan taksiran perubahan pada variabel terikat y berkenaan dengan perubahan sangat kecil pada variabel bebas x. Diferensial dari variabel terikat sebuah fungsi sekaligus merupakan pula diferensial dari fungsi yang bersangkutan, yakni hasilkali derivatifnya terhadap perubahan pada variabel bebas.

$$\text{diferensial dari } y: \quad dy = \frac{dy}{dx}\,\Delta x$$

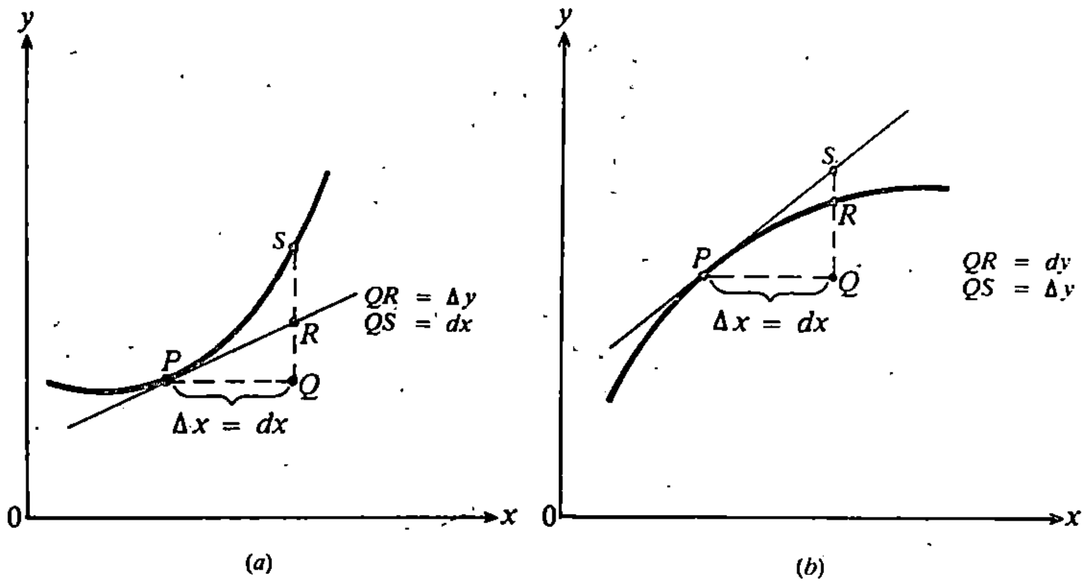
Berdasarkan penjelasan mengenai masing-masing dx dan dy di atas, maka derivatif dy/dx tak lain adalah lereng taksiran (*approximated slope*) dari kurva $y = f(x)$ pada kedudukan x tertentu. Lereng yang sesungguhnya (*the true slope*) adalah kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$. Lereng taksiran ini dapat lebih besar (*over estimated*) dari, atau lebih kecil (*under-estimated*) dari, atau sama dengan lereng sesungguhnya. Hal ini tergantung pada jenis fungsinya dan besar kecilnya perubahan pada variabel bebas.

Untuk fungsi $y = f(x)$ yang linear, lereng taksiran senantiasa sama dengan lereng sesungguhnya, berapapun Δx. Dengan perkataan lain, derivatif fungsi linear tak lain adalah kuosien diferensinya, $dy/dx = \Delta y/\Delta x$. Berapapun $\Delta x (= dx)$, akan selalu $dy = \Delta y$, sehingga $dy/dx = \Delta y/\Delta x$.



Gambar 9—1

Untuk fungsi $y = f(x)$ yang non-linear, semakin besar Δx semakin besar pula perbedaan antara lereng taksiran (derivatif, dy/dx) dan lereng sesungguhnya (kuosien diferensi, $\Delta y/\Delta x$). Dengan Δx yang semakin besar, semakin besar pula perbedaan antara dy dan Δy, sehingga kian besar pula perbedaan antara dy/dx dan $\Delta y/\Delta x$ (ingat : $dx = \Delta x$). Sebaliknya, semakin kecil Δx semakin kecil pula perbedaan antara lereng taksiran dan lereng sesungguhnya. Dan jika Δx sangat kecil ($\Delta x \to 0$), lereng taksiran akan sama dengan lereng sesungguhnya (kalaupun terdapat perbedaan, nilainya sedemikian kecilnya sehingga boleh diabaikan).



Gambar 9—2

Gambar 9-2(a) menunjukkan lereng taksiran yang "over-estimated"; $dy > \Delta y$ sehingga derivatif (dy/dx) > kuosien diferensi ($\Delta y/\Delta x$). Sedangkan Gambar 9-2(b) memperlihatkan lereng taksiran yang "under-estimated"; $dy < \Delta y$ sehingga derivatif (dy/dx) < kuosien diferensi ($\Delta y/\Delta x$). Kedua gambar di atas membuktikan bahwa jika $\Delta x \to 0$ maka $dy/dx = \Delta y/\Delta x$. Dengan demikian, penggunaan diferensial sebagai penaksir perubahan suatu fungsi — berkenaan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan — cukup dapat dipertanggungjawabkan. Inilah yang mendasari penerapan aljabar kalkulus dalam analisis bisnis dan ekonomi yang menyangkut unsur perubahan.

Contoh :

Andaikan $y = 3x^2 - 4x + 5$ dan ingin diketahui serta dibandingkan nilai dy dan nilai Δy untuk $\Delta x = 0{,}0001$ dari kedudukan $x = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 4 = 6(2) - 4 = 8 \qquad dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0{,}0001) = 0{,}0008$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5)\\ &= 3(2 + 0{,}0001)^2 - 4(2 + 0{,}0001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}0008\end{aligned}$$

Dalam contoh ini, untuk $x = 2$ dan $\Delta x = 0{,}0001$ ternyata $dy = \Delta y = 0{,}0008$, konsekuensinya $dy/dx = \Delta y/\Delta x = 8$. Berarti lereng taksirannya persis sama dengan lereng yang sesungguhnya.

Seandainya soal di atas diubah sedikit, katakanlah $x = 2$ tetapi $\Delta x = 0{,}0005$, maka :

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0{,}0005) = 0{,}004$$

$$\Delta y = 3(2 + 0{,}0005)^2 - 4(2 + 0{,}0005) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}004$$

Sekali lagi, $dy = \Delta y$ dan $dy/dx = \Delta y/\Delta x$.

Sekarang misalkan $\Delta x = 0{,}001$ dan tetap $x = 2$, maka :

$dy = 8(0{,}001) = 0{,}008$

$\Delta y = 3(2 + 0{,}001)^2 - 4(2 + 0{,}001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}008003$

Kali ini terdapat sedikit perbedaan antara dy dan Δy, yaitu sebesar 0,000003. Akan tetapi perbedaan sedemikian kecilnya sehingga boleh diabaikan. (Jika kita menggunakan bilangan tiga desimal, perbedaan tersebut akan hilang dengan sendirinya, $dy = \Delta y = 0{,}008$). Dalam kasus ini, $dy < \Delta y$ berarti lereng taksirannya "under-estimated".

Contoh matematis di atas mendukung bukti geometris sebelumnya, bahwa jika $\Delta x \rightarrow 0$ maka $dy/dx = \Delta y/\Delta x$.

9.4 DERIVATIF DARI DERIVATIF

Tergantung pada derajatnya, sesungguhnya setiap fungsi dapat diturunkan lebih dari satu kali. Dengan perkataan lain, turunannya masih bisa diturunkan lagi. Turunan pertama (*first derivative*) sebuah fungsi adalah turunan dari fungsi awal atau fungsi aslinya. Turunan kedua (*second derivative*) sebuah fungsi adalah turunan dari turunan pertama, turunan ketiga (*third derivative*) adalah turunan dari turunan kedua, dan seterusnya.

fungsi awal : $y = f(x)$

turunan pertama : $y' \equiv f'(x) \equiv \dfrac{dy}{dx} \equiv \dfrac{df(x)}{dx}$

turunan kedua : $y'' \equiv f''(x) \equiv \dfrac{d^2 y}{dx^2} \equiv \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$

turunan ketiga : $y''' \equiv f'''(x) \equiv \dfrac{d^3 y}{dx^3} \quad \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}$

turunan ke-n : $y^n \equiv f^n(x) \equiv \dfrac{d^n y}{dx^n} \equiv \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$

Contoh :

$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$
$y' = dy/dx = 3x^2 - 8x + 5$
$y'' = d^2y/dx^2 = 6x - 8$
$y''' = d^3y/dx^3 = 6$
$y^{IV} = d^4y/dx^4 = 0$

Derivatif yang diperoleh dari derivatif sebuah fungsi dinamakan derivatif berderajat lebih tinggi (*higher-order derivatives*). Derivatif pertama dan derivatif kedua sangat bermanfaat untuk menelaah fungsi yang bersangkutan. Sebagaimana akan ditunjukkan di dalam sub-bab berikut, besar kecilnya harga atau nilai derivatif pertama dan derivatif kedua dapat digunakan untuk menentukan posisi-posisi khusus dari kurva fungsi (non-linear) yang bersangkutan.

9.5 HUBUNGAN ANTARA FUNGSI DAN DERIVATIFNYA

Pendekatan kalkulus diferensial amat berguna untuk menyidik bentuk gambar suatu fungsi non-linear. Dengan mengetahui besarnya harga dari turunan pertama (*first derivative*) dan turunan kedua (*second derivative*) sebuah fungsi, akan dapat dikenali bentuk gambar dari fungsi tersebut. Secara berurutan seksi-seksi berikut akan membahas hubungan antara fungsi non-linear dan derivatif pertamanya, guna mengetahui apakah kurvanya menaik ataukah menurun pada kedudukan tertentu; hubungan antara fungsi parabolik dan derivatifnya, guna mengetahui letak dan bentuk titik ekstrimnya (maksimum atau minimum); serta hubungan antara fungsi kubik dan derivatifnya, guna mengetahui letak dan bentuk titik ekstrim serta letak titik beloknya. Akan tetapi sebelum semua itu, marilah kita perhatikan hubungan secara umum antara sebuah fungsi dan fungsi-fungsi turunannya.

Berdasarkan kaidah diferensiasi, dapat disimpulkan bahwa turunan dari suatu fungsi berderajat "*n*" adalah sebuah fungsi berderajat "*n*-1". Dengan perkataan lain, turunan dari suatu fungsi berderajat 3 adalah sebuah fungsi berderajat 2; turunan dari fungsi berderajat 2 adalah sebuah fungsi berderajat 1; turunan dari fungsi berderajat 1 adalah sebuah fungsi berderajat 0 alias sebuah konstanta; dan akhirnya, turunan dari sebuah konstanta adalah 0.

Contoh :

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ .... fungsi kubik
$y' = dy/dx = x^2 - 8x + 12$ .... fungsi kuadrat
$y'' = d^2y/dx^2 = 2x - 8$ .... fungsi linear
$y''' = d^3y/dx^3 = 2$ .... konstanta

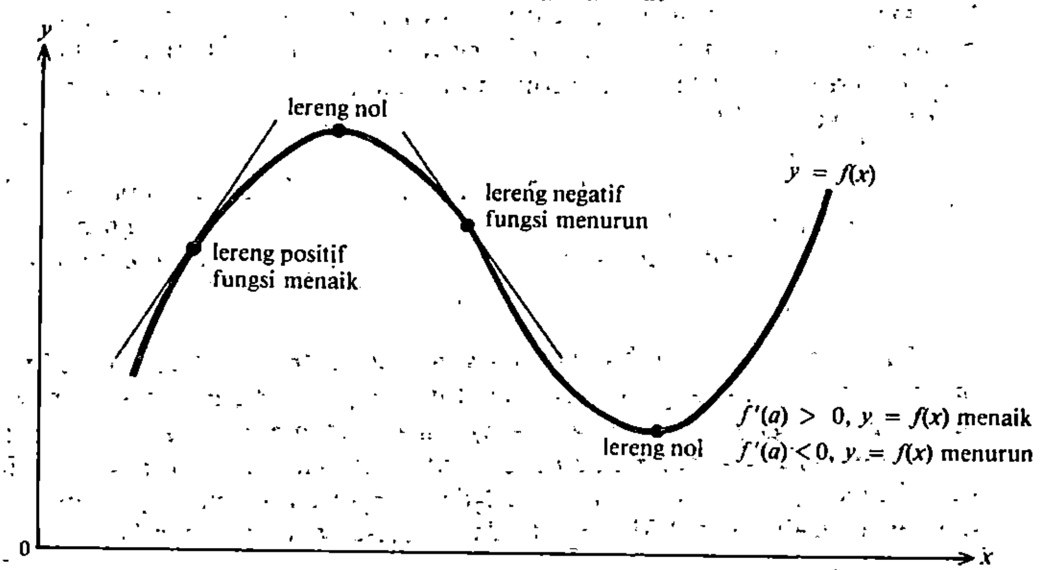
(Perhatikan pengurangan derajat fungsi pada masing-masing turunannya).

9.5.1 Fungsi Menaik dan Fungsi Menurun

Derivatif pertama dari sebuah fungsi non-linear dapat digunakan untuk menentukan apakah kurva dari fungsi yang bersangkutan menaik ataukah menurun pada kedudukan tertentu. Dalam kasus khusus, derivatif pertama dapat pula menunjukkan titik ekstrim sebuah fungsi non-linear.

Dalam Sub-bab 9.3 telah dijelaskan bahwa derivatif pertama dari fungsi $y = f(x)$, yakni $f'(x)$, tak lain adalah lereng (taksiran) dari kurva yang mencerminkan fungsi $y = f(x)$. Berarti untuk $y = f(x)$ pada kedudukan tertentu $x = a$, $f'(a)$ merupakan lereng kurva $y = f(x)$ pada kedudukan $x = a$. Positif negatifnya nilai $f'(a)$ akan menentukan menaik atau menurunnya fungsi $y = f(x)$ pada $x = a$.

Jika derivatif pertama $f'(a) > 0$ (lereng kurvanya positif pada $x = a$), maka $y = f(x)$ merupakan fungsi menaik pada kedudukan $x = a$; yakni $y = f(x)$ menaik manakala x bertambah sesudah $x = a$. Sedangkan jika derivatif pertama $f'(a) < 0$ (lereng kurvanya negatif pada $x = a$), maka $y = f(x)$ merupakan fungsi menurun pada kedudukan $x = a$; yakni $y = f(x)$ menurun manakala x bertambah sesudah $x = a$.



Gambar 9—3

Uji Tanda. Apabila derivatif pertama $f'(x) = 0$, berarti $y = f(x)$ berada di titik ekstrimnya. Guna menentukan apakah titik ekstrim tersebut merupakan titik maksimum ataukah titik minimum, perlu dilakukan uji tanda terhadap $f'(a) = 0$. Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > a$, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum. Sedangkan jika $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > a$, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum.

Contoh :

Tentukan apakah $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada $x = 5$ dan $x = 7$. Selidiki pula untuk $x = 6$.

$f'(x) = x^2 - 8x + 12$

$\rightarrow f'(5) = 5^2 - 8(5) + 12 = -3 < 0$, berarti $y = f(x)$ menurun pada $x = 5$
$\rightarrow f'(7) = 7^2 - 8(7) + 12 = 5 > 0$, berarti $y = f(x)$ menaik pada $x = 7$
$\rightarrow f'(6) = 6^2 - 8(6) + 12 = 0$, berarti $y = f(x)$ berada di titik ekstrim pada $x = 6$; karena $f'(x) < 0$ untuk $x < 6$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > 6$, titik ekstrim pada $x = 6$ ini adalah titik minimum.

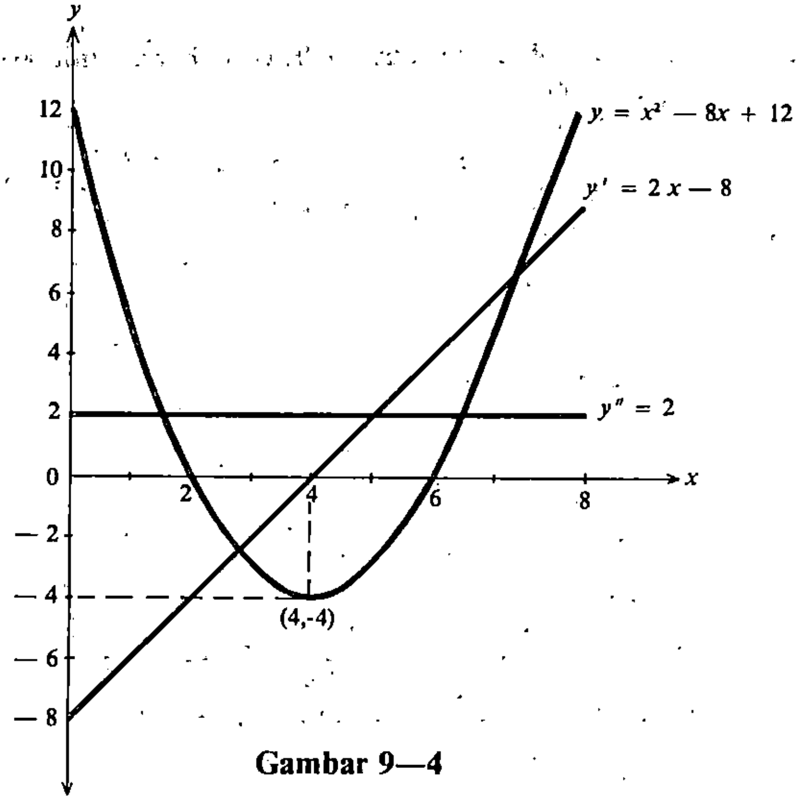
[Apabila diselidiki lebih lanjut, sesungguhnya $f'(x) < 0$ hanya berlaku untuk interval $2 < x < 6$. Pada kedudukan $x = 2$, $y = f(x)$ berada di titik ekstrim yang lain, yaitu titik maksimum. Buktikan !]

9.5.2 Titik Ekstrim Fungsi Parabolik

Dalam hal $y = f(x)$ adalah sebuah fungsi parabolik, derivatif pertama berguna untuk menentukan letak titik ekstrimnya, sedangkan derivatif kedua bermanfaat guna mengetahui jenis titik ekstrim yang bersangkutan. Perhatikan fungsi parabolik berikut dan turunan-turunannya, serta hubungan mereka secara grafik.

$y = f(x) = x^2 - 8x + 12$ .... fungsi parabolik
$y' = f'(x) = dy/dx = 2x - 8$ .... fungsi linear
$y'' = f''(x) = d^2y/dx^2 = 2$ .... konstanta

Parabola $y = x^2 - 8x + 12$ mencapai titik ekstrim — dalam hal ini titik minimum yaitu (4, -4) — tepat pada saat turunan pertama dari fungsi parabolik tadi (yakni fungsi linear $y' = 2x - 8$) sama dengan nol. Pada $y' = 0$, nilai variabel bebas $x = 4$, dan parabola tersebut mencapai titik ekstrimnya — yaitu pada kedudukan $x = 4$ dan $y = -4$. Nilai $y = -4$ untuk fungsi parabolik ini diperoleh melalui substitusi $x = 4$ ke dalam persamaan parabolanya.



Gambar 9—4

Berdasarkan percobaan di atas, maka — selain dengan cara tradisional seperti yang diuraikan di dalam Seksi 7.1.5 di depan — penentuan titik ekstrim suatu fungsi parabolik dapat pula dilakukan dengan pendekatan diferensial. Absis dari titik ekstrim fungsi parabolik $y = f(x)$ adalah x pada $y' = 0$, sedangkan ordinatnya adalah y untuk x pada $y' = 0$. Kemudian untuk mengetahui apakah titik ekstrimnya berupa titik maksimum ataukah titik minimum, dengan kata lain untuk mengetahui apakah parabolanya terbuka ke bawah ataukah terbuka ke atas, dapat disidik melalui turunan kedua dari fungsi paraboliknya yaitu y''. Apabila $y'' < 0$, bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum. Sebaliknya jika $y'' > 0$, bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum. Jadi, ringkasnya :

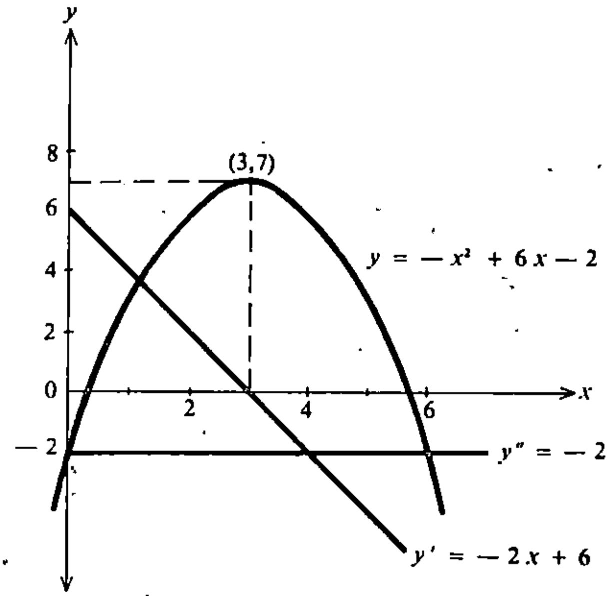
• Parabola $y = f(x)$	mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
→ jika $y'' < 0$:	bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum
→ jika $y'' > 0$:	bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum

Contoh :

1) Andaikan $y = -x^2 + 6x - 2$
   maka $y' = -2x + 6$
   $y'' = -2 < 0$

Karena $y'' < 0$ maka bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.
Koordinat titik maksimum :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Syarat } y \text{ maksimum : } y' = 0 \rightarrow -2x + 6 = 0, \quad x = 3 \\ \text{untuk } x = 3 \rightarrow y = -(3)^2 + 6(3) - 2 = 7\end{array}\right\} (3,7)$$

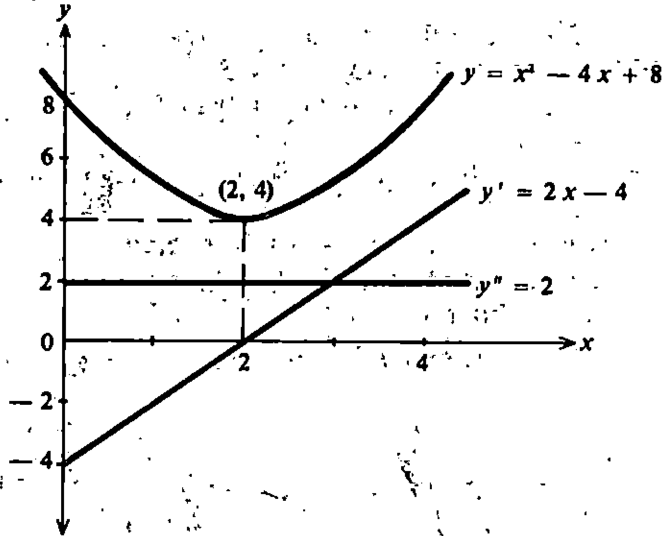


Gambar 9—5

2) Andaikan $\quad y = x^2 - 4x + 8$
maka $\quad y' = 2x - 4$
$\quad y'' = 2 > 0$
Karena $y'' > 0$ maka bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum.
Koordinat titik minimum :

$$\left.\begin{array}{l}\text{syarat } y \text{ minimum : } y' = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0, \quad x = 2 \\ \text{untuk } x = 2 \rightarrow y = 2^2 - 4(2) + 8 = 4\end{array}\right\} (2, 4)$$

1⁹/₁₄



Gambar 9—6

9.5.3 Titik Ekstrim dan Titik Belok Fungsi Kubik

Titik maksimum dan titik minimum suatu fungsi kubik (jika ada), serta titik beloknya, dapat dicari melalui penelusuran terhadap derivatif pertama dan derivatif kedua dari fungsinya. Derivatif pertama berguna untuk menentukan letak titik(-titik) ekstrimnya, sedangkan derivatif kedua bermanfaat guna mengetahui jenis titik(-titik) ekstrim yang bersangkutan dan menentukan letak titik beloknya. Perhatikan fungsi kubik berikut dan turunan-turunannya, serta hubungan mereka secara grafik.

$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ .... fungsi kubik
$y' = x^2 - 6x + 8$ .... fungsi kuadrat parabolik
$y'' = 2x - 6$ .... fungsi linear

Jika $y' = 0$, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $(x - 2)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 4$

Untuk $x = x_1 = 2$
$\rightarrow y = \frac{1}{3}(2)^3 - 3(2)^2 + 8(2) - 3 = 3{,}67$
[fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik ekstrim maksimum]
$\rightarrow y'' = 2(2) - 6 = -2 < 0$ [derivatif kedua negatif]

Untuk $x = x_2 = 4$
$\rightarrow y = \frac{1}{3}(4)^3 - 3(4)^2 + 8(4) - 3 = 2{,}33$
[fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik ekstrim minimum]
$\rightarrow y'' = 2(4) - 6 = 2 > 0$ [derivatif kedua positif]

Jika $y'' = 0$, $\quad 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$\rightarrow \; y = \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 8(3) - 3 = 3$

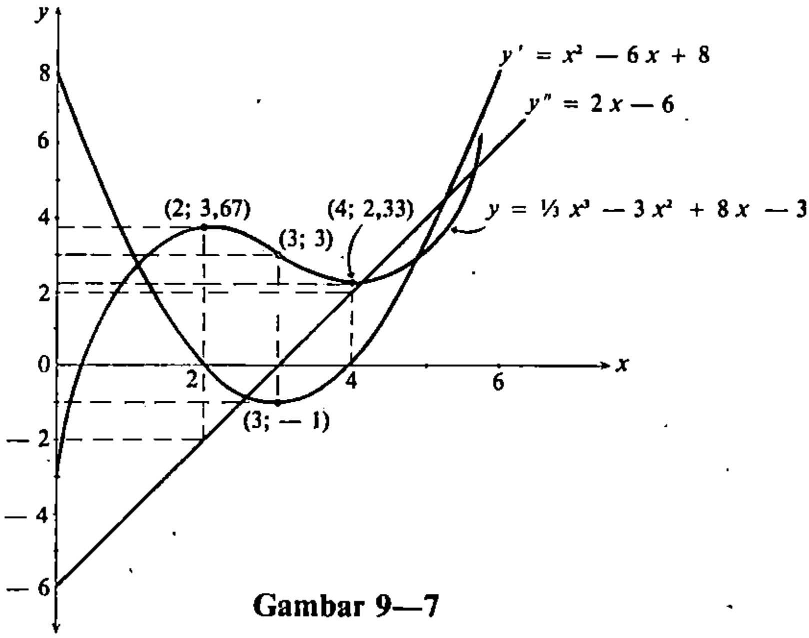
[fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik belok]

$\rightarrow \; y' = 3^2 - 6(3) + 8 = -1$

[derivatif pertama berada di titik ekstrim, dalam hal ini titik minimum]

Jadi, fungsi kubik $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ berada di :

titik maksimum pada koordinat (2; 3,67)
titik belok pada koordinat (3; 3)
titik minimum pada koordinat (4; 2,33)



Gambar 9—7

Perhatikan gambar di atas. Fungsi kubik $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim maksimum ketika derivatif pertamanya $y' = f'(x) = 0$ dan derivatif keduanya $y'' = f''(x) < 0$, mencapai titik ekstrim minimum ketika $y' = f'(x) = 0$ dan $y'' = f''(x) > 0$, serta berada di titik belok ketika $y'' = f''(x) = 0$. Secara umum, meskipun tidak semua fungsi kubik mempunyai titik ekstrim, dapat disimpulkan bahwa :

- Fungsi kubik $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
  - → jika $y'' < 0$ pada $y' = 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum
  - → jika $y'' > 0$ pada $y' = 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum
- Fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik belok pada $y'' = 0$

Contoh :

Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik

$$y = -x^3 + 15x^2 - 48x.$$

$y = -x^3 + 15x^2 - 48x \rightarrow y' = -3x^2 + 30x - 48 \rightarrow y'' = -6x + 30$

Syarat y ekstrim : $y' = 0, \quad -3x^2 + 30x - 48 = 0 \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 8$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \rightarrow y = -8 + 60 - 96 = -44 \\ \quad y'' = -12 + 30 = 18 > 0 \end{array}\right\} \text{minimum } (2, -44)$$

:18

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \rightarrow y = -512 + 960 - 384 = 64 \\ \quad y'' = -48 + 30 = -18 < 0 \end{array}\right\} \text{maksimum } (8, 64)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Syarat titik belok} : y'' = 0 \rightarrow x = 5 \\ x = 5 \rightarrow y = -125 + 375 - 240 = 10 \end{array}\right\} \text{titik belok } (5, 10)$$

Latihan Diferensiasi Lanjut

1. Andaikan $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$. Tentukan apakah dy/dx "over-estimated" ataukah "under-estimated" sebagai penaksir $\Delta y/\Delta x$ pada $x = 3$ untuk $\Delta x = 0{,}02$.

2. Andaikan $y = (x^2 - 4)/(2x - 6)$. Bandingkan dy/dx terhadap $\Delta y/\Delta x$ pada kedudukan $x = -5$ untuk $\Delta x = 1$.

3. Tentukan d^2y/dx^2 untuk :
   (a) $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$
   (b) $y = 9 - 3x^{-1} + 6x^{-2}$
   (c) $y = (x^2 - 4)(2x - 6)$
   (d) $y = (3x^2 - x)(2 + x^{-1})$

4. Tentukan d^3y/dx^3 untuk :
   (a) $y = (5x + 12 - 2x^{-1})^3$
   (b) $y = \left(\dfrac{5x + 2}{x}\right)^2$
   (c) $e^y - xe^x = 0$
   (d) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

$-483 + 1(98)^2 - 9898$

$=$

5. Tentukan apakah $y = 0{,}5x^2 - 4x + 15$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada $x = 3$ dan $x = 6$.

6. Tentukan apakah $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada $x = 3$ dan $x = 6$.

7. Tentukan letak dan jenis titik ekstrim parabola :
   (a) $y = 0,5\,x^2 - 4\,x + 15$
   (b) $y = 3\,x^2 - 30\,x + 77$
   (c) $y = -4\,x^2 + 32\,x - 57$
   (d) $y = -5\,x^2 + 30\,x - 35$

8. Tentukan letak dan jenis titik ekstrim parabola $y = x^2$, serta perpotongannya pada sumbu -x dan sumbu -y.

9. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik :
   (a) $y = x^3 - 9\,x^2 + 15\,x + 40$
   (b) $y = -2\,x^3 + 18\,x^2$ untuk $x \geqslant 0$

10. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik $y = x^3 - 27\,x$. Kemudian jelaskan apakah fungsinya menaik ataukah menurun pada $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ dan $x = 4$.

9.6 PENERAPAN EKONOMI

Teori diferensial amat lazim diterapkan dalam konsep elastisitas, konsep nilai marjinal dan konsep optimisasi. Dalam kaitannya dengan konsep elastisitas, pada sub-bab ini secara berurutan akan dibahas penerapan diferensial dalam penghitungan elastisitas berbagai variabel ekonomi. Sedangkan dalam kaitannya dengan konsep nilai marjinal dan konsep optimisasi, akan dibahas penerapan diferensial dalam pembentukan fungsi atau penghitungan nilai marjinal dari berbagai variabel ekonomi; serta penentuan nilai optimum dari fungsi atau variabel yang bersangkutan. Kemudian akan dibahas pula hubungan antara nilai total, nilai marjinal dan nilai rata-rata dari fungsi biaya dan fungsi produksi.

9.6.1 Elastisitas

Elastisitas dari suatu fungsi $y = f(x)$ berkenaan dengan x dapat didefinisikan sebagai :

$$\boxed{\eta = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta y/y)}{(\Delta x/x)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}}$$

Ini berarti bahwa elastisitas $y = f(x)$ merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elastisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio antara persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x.

(a) Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga-permintaan, *price elasticity of demand*) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(P)$, maka elastisitas permintaannya :

$$\boxed{\eta_d = \frac{\% \Delta Q_d}{\% \Delta P} = \frac{EQ_d}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{(\Delta Q_d/Q_d)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}}$$

di mana dQ_d/dP tak lain adalah Q'_d atau $f'(P)$

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastik apabila $|\eta_d| > 1$, elastik-uniter jika $|\eta_d| = 1$, dan inelastik bila $|\eta_d| < 1$. Barang yang permintaannya elastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar daripada persentase perubahan harganya.

Kasus 42

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 25 - 3P^2$. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga $P = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} Q_d = 25 - 3P^2 \\ \\ Q'_d = \dfrac{dQ_d}{dp} = -6P \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \eta_d = \dfrac{dQ_d}{dP} \cdot \dfrac{P}{Q_d} = -6P \cdot \dfrac{P}{25 - 3P^2} \\ \\ \quad = -6(5) \cdot \dfrac{5}{25 - 75} = 3 \text{ (elastik)} \end{array}$$

$\eta_d = 3$ berarti bahwa apabila, dari kedudukan $P = 5$, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (bertambah) sebanyak 3 persen.

Kasus 43

Permintaan akan suatu barang dicerminkan oleh $D = 4 - P$, di mana D melambangkan jumlah barang yang diminta dan P adalah harganya per unit. Hitunglah elastisitas permintaannya pada tingkat harga $P = 3$ dan pada tingkat permintaan $D = 3$.

$D = 4 - P \rightarrow D' = dD/dP = -1$

Pada $P = 3$, $D = 4 - 3 = 1 \rightarrow \eta_d = \dfrac{dD}{dP} \cdot \dfrac{P}{D} = -1 \cdot \dfrac{3}{1} = -3$ (elastik)

Pada $D = 3$; $P = 1 \rightarrow \eta_d = \dfrac{dD}{dP} \cdot \dfrac{P}{D} = -1 \cdot \dfrac{1}{3} = -⅓$ (inelastik)

Catatan :

Dalam konsep elastisitas permintaan, yang dipentingkan adalah besarnya angka hasil perhitungan; apakah angka tersebut lebih besar dari ataukah sama dengan atau lebih kecil dari satu; yakni untuk menentukan apakah sifat permintaannya elastik, elastik-uniter, atau inelastik. Sedangkan tanda di depan hasil perhitungan (seandainya negatif) dapat diabaikan, karena hal itu sekedar mencerminkan berlakunya hukum permintaan bahwa jumlah yang diminta bergerak berlawanan arah dengan harga.

(b) Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga-penawaran, *price elasticity of supply*) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan berkenaan adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan $Q_s = f(P)$, maka elastisitas penawarannya :

$$\boxed{\eta_S = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P} = \frac{EQ_s}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{(\Delta Q_s/Q_s)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}}$$

di mana dQ_s/dP tak lain adalah Q'_s atau $f'(P)$.

Penawaran suatu barang dikatakan bersifat elastik apabila $\eta_s > 1$, elastik-uniter jika $\eta_s = 1$ dan inelastik bila $\eta_s < 1$. Barang yang penawarannya inelastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil daripada persentase perubahan harganya.

Kasus 44

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga $P = 10$ dan $P = 15$?

$$\left.\begin{array}{l} Q_s = -200 + 7P^2 \\ Q'_s = dQ_s/dP = 14P \end{array}\right\} \quad \eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s} = 14P \cdot \frac{P}{-200 + 7P^2}$$

Pada $P = 10$, $\quad \eta_s = 140 \cdot \dfrac{10}{-200 + 700} = 2{,}8$

Pada $P = 15$, $\quad \eta_s = 210 \cdot \dfrac{15}{-200 + 1575} = 2{,}3$

(c) Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (*output*) yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah masukan (*input*) yang digunakan. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah keluaran terhadap persentase perubahan jumlah masukan. Jika P melambangkan jumlah produk yang dihasilkan sedangkan X melambangkan jumlah faktor produksi yang digunakan, dan fungsi produksi dinyatakan dengan $P = f(X)$, maka elastisitas produksinya :

$$\boxed{\eta_p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(\Delta P/P)}{(\Delta X/X)} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}}$$

di mana dP/dX adalah produk marjinal dari X [P' atau $f'(X)$].

Kasus 45

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 6X^2 - X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit.

$$P = 6X^2 - X^3 \rightarrow P' = dP\ dX = 12X - 3X^2$$

$$\eta_p = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P} = (12X - 3X^2) \cdot \frac{X}{(6X^2 - X^3)}$$

Pada $X = 3$, $\quad \eta_p = (36 - 27) \cdot \dfrac{3}{(54 - 27)} = 1$

Pada $X = 7$, $\quad \eta_p = (84 - 147) \cdot \dfrac{7}{(294 - 343)} = 9$

9.6.2 Biaya Marjinal

Biaya marjinal (*marginal cost, MC*) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Secara matematik, fungsi biaya marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi biaya total. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan $C = f(Q)$ di mana C adalah biaya total dan Q melambangkan jumlah produk, maka biaya marjinalnya :

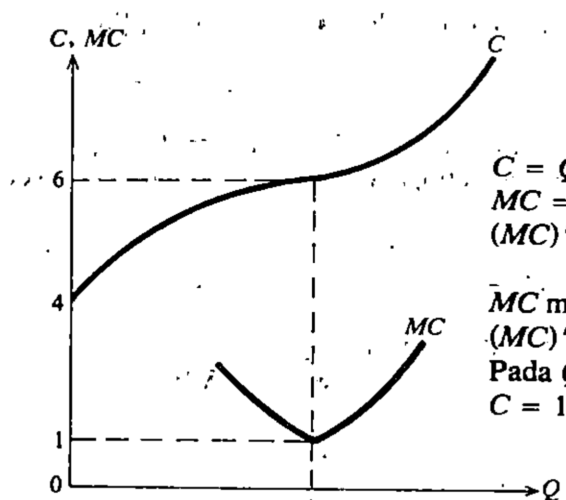
$$\boxed{MC = C' = \frac{dC}{dQ}}$$

Kasus 46

Biaya total : $C = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

Biaya marjinal : $MC = C' = dC/dQ = 3Q^2 - 6Q + 4$

Pada umumnya fungsi biaya total yang non-linear berbentuk fungsi kubik, sehingga fungsi biaya marjinalnya berbentuk fungsi kuadrat. Dalam hal demikian, seperti ditunjukkan oleh Kasus 46 ini, kurva biaya marjinal (MC) selalu mencapai minimumnya tepat pada saat kurva biaya total (C) berada pada posisi titik beloknya. [Periksa kembali Seksi 9.5.3 (Titik Ekstrim dan Titik Belok Fungsi Kubik) di depan].



$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

$MC = C' = 3Q^2 - 6Q + 4$

$(MC)' = C'' = 6Q - 6$

MC minimum jika $(MC)' = 0$

$(MC)' = 0 \rightarrow 6Q - 6 = 0 \rightarrow Q = 1$

Pada $Q = 1 \rightarrow MC = 3(1)^2 - 6(1) + 4 = 1$

$C = 1^3 - 3(1)^2 + 4(1) + 4 = 6$

Gambar 9—8

9.6.3 Penerimaan Marjinal

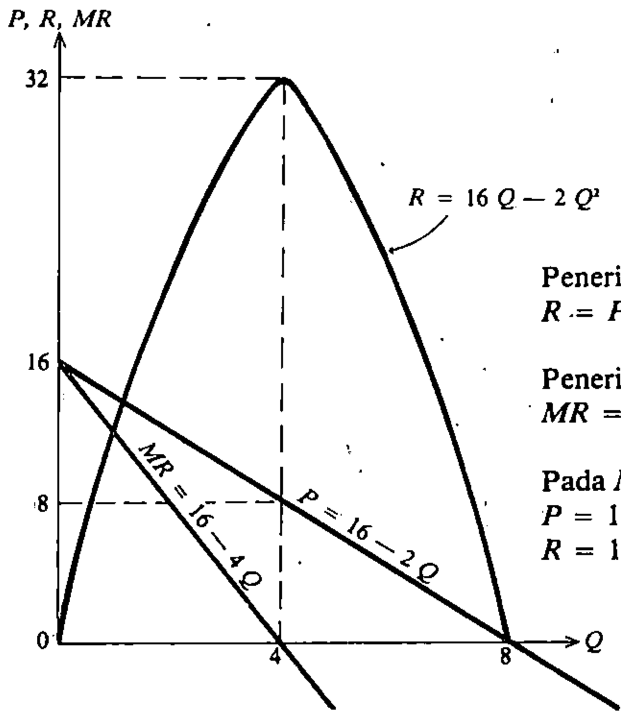
Penerimaan marjinal (*marginal revenue, MR*) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi atau terjual. Secara matematik, fungsi penerimaan marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi penerimaan total. Jika fungsi penerimaan total dinyatakan dengan $R = f(Q)$ di mana R melambangkan penerimaan total dan Q adalah jumlah keluaran, maka penerimaan marjinalnya :

$$\boxed{MR = R' = \frac{dR}{dQ}}$$

Karena fungsi penerimaan total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat (parabolik), fungsi penerimaan marjinalnya akan berbentuk fungsi linear. Kurva penerimaan marjinal (MR) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva penerimaan total (R) berada pada posisi puncaknya. [Alasan mengenai hubungan ini dapat pembaca temui pada Seksi 9.5.2 (Titik Ekstrim Fungsi Parabolik) di halaman 214 — 217.

Kasus 47

Andaikan fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh $P = 16 - 2\,Q$.



Penerimaan total :
$R = P \,.\, Q = f(Q) = 16\,Q - 2\,Q^2$

Penerimaan marjinal :
$MR = R' = 16 - 4\,Q$

Pada $MR = 0$, $Q = 4$
$P = 16 - 2(4) = 8$
$R = 16(4) - 2(4)^2 = 32$

Gambar 9—9

9.6.4 Utilitas Marjinal

Utilitas marjinal (*marginal utility, MU*) ialah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya. Secara matematik, fungsi utilitas marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi utilitas total. Jika fungsi utilitas total dinyatakan dengan $U = f(Q)$ di mana U melambangkan utilitas total dan Q adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marjinalnya :

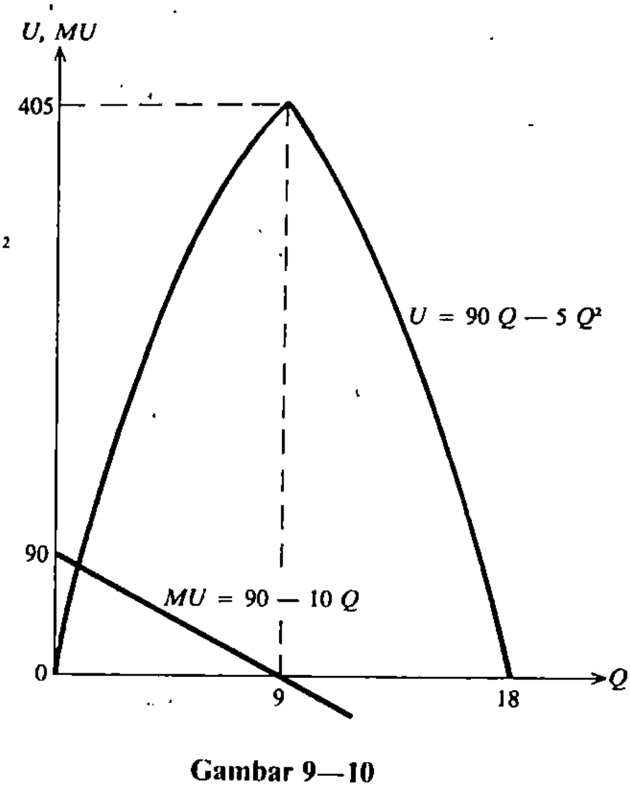
$$\boxed{MU = U' = \frac{dU}{dQ}}$$

Karena fungsi utilitas total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kuadrat, fungsi utilitas marjinalnya akan berbentuk fungsi linear. Kurva utilitas marjinal (MU) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva utilitas total (U) berada pada posisi puncaknya.

Kasus 48

$U = f(Q) = 90\,Q - 5\,Q^2$
$MU = U' = 90 - 10\,Q$

U maksimum pada $MU = 0$
$MU = 0 \rightarrow Q = 9$
$U_{\text{maksimum}} = 90(9) - 5(9)^2$
$= 810 - 405$
$= 405$



Gambar 9—10

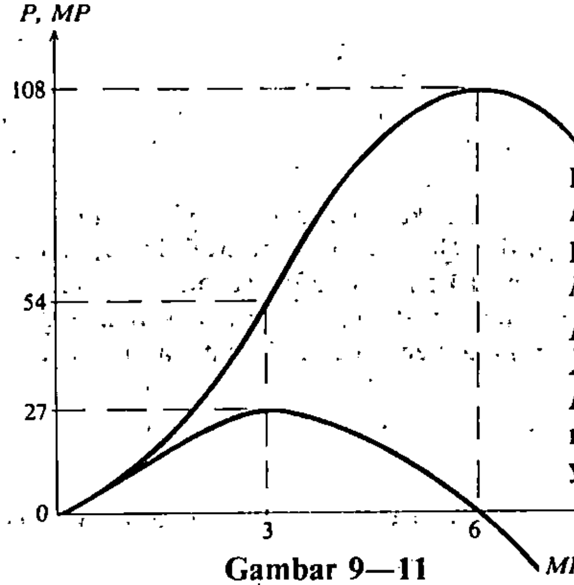
9.6.5 Produk Marjinal

Produk marjinal (*marginal product, MP*) ialah produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan faktor produksi yang digunakan. Secara matematik, fungsi produk marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total. Jika fungsi produk total dinyatakan dengan $P = f(X)$ di mana P melambangkan jumlah produk total dan X adalah jumlah masukan, maka produk marjinalnya :

$$\boxed{MP = P' = \frac{dP}{dX}}$$

Karena fungsi produk total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kubik, fungsi produk marjinalnya akan berbentuk fungsi kuadrat (parabolik). Kurva produk marjinal (MP) selalu mencapai nilai ekstrimnya, dalam hal ini nilai maksimum, tepat pada saat kurva produk total (P) berada pada posisi titik beloknya; kedudukan ini mencerminkan berlakunya hukum tambahan hasil yang semakin berkurang (*the law of the diminishing return*). Produk total mencapai puncaknya ketika produk marjinalnya nol. Sesudah kedudukan ini, produk total menurun bersamaan dengan produk marjinal menjadi negatif. Area di mana produk marjinal negatif menunjukkan bahwa penambahan penggunaan masukan yang bersangkutan justru akan mengurangi jumlah produk total, mengisyaratkan terjadinya disefisiensi dalam kegiatan produksi. Dalam area ini, jika produk total hendak ditingkatkan, jumlah masukan yang digunakan harus dikurangi.

Kasus 49



Produksi total :
$P = f(X) = 9X^2 - X^3$
Produk marjinal :
$MP = P' = 18X - 3X^2$
P maksimum pada $P' = 0$; yakni pada $X = 6$, dengan $P_{maksimum} = 108$.
P berada di titik belok dan MP maksimum pada $P'' = (MP)' = 0$; yakni pada $X = 3$.

Gambar 9—11

9.6.6 Analisis Keuntungan Maksimum

Tingkat produksi yang memberikan keuntungan maksimum, atau menimbulkan kerugian maksimum, dapat disidik dengan pendekatan diferensial. Karena baik penerimaan total (R) maupun biaya total (C) sama-sama merupakan fungsi dari jumlah keluaran yang dihasilkan/terjual (Q), maka dari sini dapat dibentuk suatu fungsi baru yaitu fungsi keuntungan (π). Nilai ekstrim atau nilai optimum π dapat ditentukan dengan cara menetapkan derivatif pertamanya sama dengan nol.

$$\left.\begin{array}{l} R = r(Q) \\ C = c(Q) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \pi = R - C \equiv r(Q) - c(Q) = f(Q) \\ \pi \text{ optimum jika } \pi' \equiv f'(Q) \equiv d\pi/dQ = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Karena } \pi = R - C \\ \text{maka } \pi' = R' - C' = MR - MC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Berarti pada } \pi \text{ optimum :} \\ \pi' = 0 \rightarrow MR - MC = 0 \rightarrow MR = MC \end{array}$$

Secara grafik, kesamaan $MR = MC$ atau kedudukan $\pi' = 0$ ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva penerimaan marjinal (MR) dan kurva biaya marjinal (MC). Hal ini sekaligus mencerminkan jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C). Akan tetapi syarat $MR = MC$ atau $\pi' = 0$ belumlah cukup untuk mengisyaratkan keuntungan maksimum, sebab jarak terlebar yang dicerminkannya mungkin merupakan selisih positif "$R - C$" (berarti keuntungan) atau merupakan selisih negatif "$R - C$" (berarti kerugian).

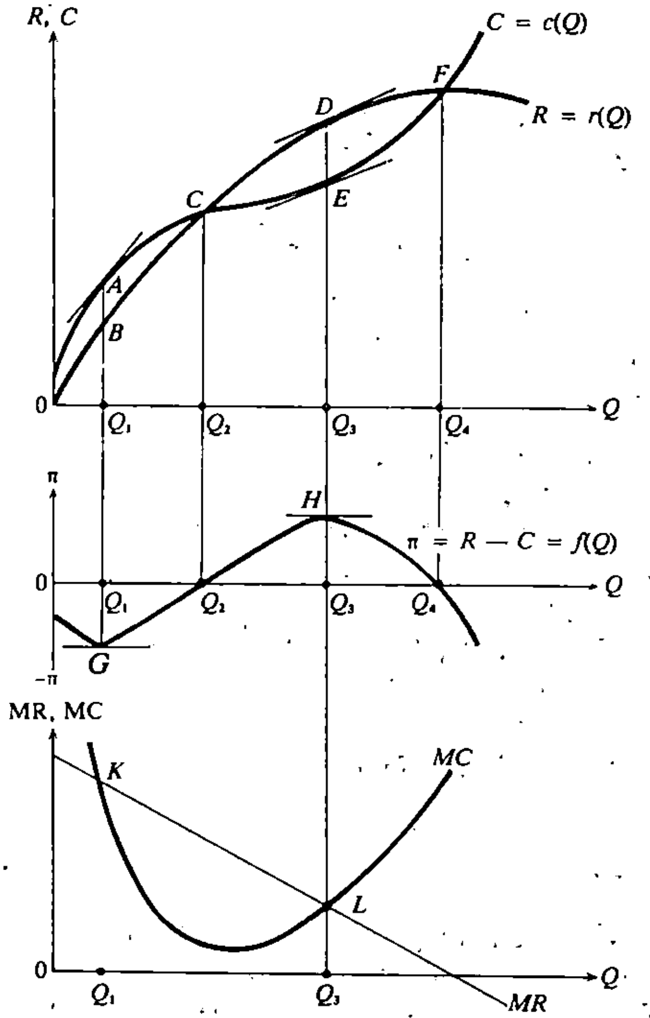
Untuk mengetahui apakah $\pi' = 0$ mencerminkan keuntungan maksimum ataukah justru kerugian maksimum, perlu diuji melalui derivatif kedua dari fungsi π.

$\pi = R - C = f(Q)$
π optimum apabila $\pi' = 0$ atau $MR = MC$
Jika $\pi'' < 0 \rightarrow \pi$ maksimum $\equiv$ keuntungan maksimum
Jika $\pi'' > 0 \rightarrow \pi$ minimum $\equiv$ kerugian maksimum*)

Pada gambar di bawah terlihat ada dua keadaan di mana $\pi' = 0$ ($MR = MC$), yakni pada tingkat produksi Q_1 dan Q_3. Pada tingkat produksi Q_1, jarak terlebar antara kurva penerimaan total (R) dan kurva biaya total (C) mencerminkan selisih negatif terbesar. Hal ini berarti terjadi kerugian maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai minimumnya di titik G.

---

*)Hati-hati : π minimum bukan berarti keuntungan minimum ataupun kerugian minimum, melainkan kerugian maksimum !



Gambar 9—12

Sedangkan pada tingkat produksi Q_3, jarak terlebar antara kurva R dan kurva C mencerminkan selisih positif terbesar. Hal ini berarti terjadi keuntungan maksimum, sebagaimana tercermin oleh kurva π yang mencapai maksimumnya di titik H.

Dengan demikian syarat agar diperoleh keuntungan maksimum adalah :

$\pi' = 0$	atau	$MR = MC$
$\pi'' < 0$	atau	$(MR)' < (MC)'$

Syarat pertama disebut syarat yang diperlukan (*necessary condition*), sedangkan syarat kedua disebut syarat yang mencukupkan (*sufficient condition*).

Kasus 50

Andaikan :

$$R = r(Q) = -2\,Q^2 + 1000\,Q.$$
$$C = c(Q) = Q^3 - 59\,Q^2 + 1315\,Q + 2000$$

Maka :

$$\pi = R - C = -Q + 57\,Q^2 - 315\,Q - 2000$$

Agar keuntungan maksimum :

$$\pi' = 0$$
$$-3\,Q^2 + 114\,Q - 315 = 0$$
$$-Q^2 + 38\,Q - 105 = 0$$
$$(-Q + 3)(Q - 35) = 0, \text{ diperoleh } Q_1 = 3 \text{ dan } Q_2 = 35$$
$$\pi'' = -6\,Q + 114$$
$$\text{Jika } Q = 3,\ \pi'' = -6(3) + 114 = 96 > 0$$
$$\text{Jika } Q = 35,\ \pi'' = -6(35) + 114 = -96 < 0$$

Karena $\pi'' < 0$ untuk $Q = 35$, maka tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum adalah $Q = 35$ unit. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut :

$$\pi = -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000 = 13.925.$$

9.6.7 Penerimaan Pajak Maksimum

Dalam Seksi 6.5.2 kita telah mempelajari bahwa jika penawaran suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = a + bQ$, dan pemerintah mengenakan pajak-spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual, maka

$$\text{penawaran sesudah pajak : } P = a + bQ + t.$$

Dari sini bisa dibentuk fungsi pajak-spesifik per unit barang, yaitu :

$$t = P - a - bQ.$$

Apabila fungsi permintaan akan barang dicerminkan oleh $P = c - dQ$ maka, dengan mensubstitusikan P dari fungsi permintaan ini ke dalam persamaan pajak per unit di atas, diperoleh :

$$t = c - dQ - a - bQ = (c - a) - (d + b)\,Q.$$

Pajak total yang diterima oleh pemerintah adalah besarnya pajak per unit dikalikan jumlah barang yang terjual di pasar (jumlah keseimbangan) sesudah pengenaan pajak tersebut. Dengan notasi matematis :

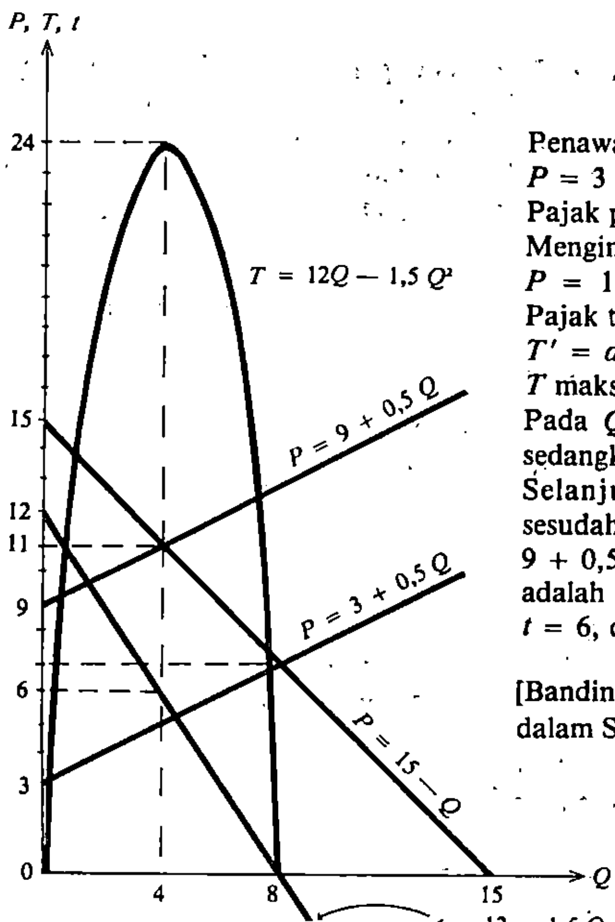
$$T = t.Q = (c - a)\,Q - (d + b)\,Q^2$$

Berdasarkan bentuk persamaan terakhir yang kuadrat-parabolik ini, kita dapat menentukan pada tingkat keterjualan berapa unit barang (Q) pemerintah akan memperoleh penerimaan maksimum dari rencana pajak-spesifik yang akan dikenakannya.

Pajak total yang diterima pemerintah : $T = t(Q) = (c - a)Q - (d + b)Q^2$ T maksimum jika $T' = 0$, yakni pada $Q = (c - a)/2(d + b)$

Kasus 51

Andaikan permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 - Q$, sedangkan penawarannya $P = 3 + 0{,}5\,Q$. Pemerintah bermaksud mengenakan pajak-spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual. Jika penerimaan pajak atas barang ini diinginkan maksimum, berapa besarnya pajak per unit yang harus ditetapkan ? Berapa besarnya penerimaan pajak maksimum tersebut ?



Gambar 9—13

Penawaran sesudah pajak : $P = 3 + 0{,}5Q + t$.
Pajak per unit : $t = P - 3 - 0{,}5\,Q$.
Mengingat menurut fungsi permintaan $P = 15 - Q$, maka $t = 12 - 1{,}5Q$.
Pajak total : $T = t.Q = 12\,Q - 1{,}5\,Q^2$
$T' = dT/dQ = 12 - 3\,Q$.
T maksimum jika $T' = 0 \rightarrow Q = 4$.
Pada $Q = 4$, $t = 12 - 1{,}5(4) = 6$, sedangkan $T = t.Q = 6(4) = 24$.
Selanjutnya, persamaan penawaran sesudah pajak $P = 3 + 0{,}5\,Q + 6 = 9 + 0{,}5\,Q$, harga keseimbangan di pasar adalah 11. Jadi T akan maksimum jika $t = 6$, dengan $T_{\text{maksimum}} = 24$.

[Bandingkan kasus ini dengan Kasus 7 di dalam Seksi 6.5.2 (halaman 94)].

9.6.8 Efek Pemajakan Bagi Penunggal

Pajak, di samping merupakan sumber penting pendapatan negara, dapat pula berfungsi sebagai instrumen kendali atas keuntungan "berlebihan" yang dapat dikeduk oleh penunggal (*monopolist*). Pengenaan pajak sebesar t per unit barang yang diproduksi atau dijual oleh penunggal akan mengakibatkan biaya rata-ratanya meningkat sebesar t, dan biaya totalnya meningkat sebesar tQ. Akibatnya bukan saja harga barang menjadi lebih mahal, tetapi juga keuntungan yang diperoleh penunggal menjadi berkurang.

Penerimaan total : $R = r(Q)$
Biaya total : $C = c(Q)$
Keuntungan : $\pi = R - C$
$\pi = r(Q) - c(Q)$
Biaya total sesudah pengenaan pajak : $C = c(Q) + tQ$
Keuntungan sesudah pengenaan pajak : $\pi = r(Q) - c(Q) - tQ$
Pajak per unit : t
Pajak total : $T = t.Q = f(t, Q)$

Kasus 52

Andaikan seorang penunggal atau monopolist menghadapi fungsi permintaan $P = 1000 - 2Q$ dan fungsi biaya totalnya $C = 2000 + 1315Q - 59Q^2 + Q^3$. Pemerintah memungut pajak sebesar 405 atas setiap unit barang yang diproduksi/dijual. Bandingkan keuntungan maksimum yang diperoleh penunggal ini antara tanpa dan dengan pengenaan pajak ! Berapa pajak total yang diterima pemerintah ?

Tanpa pengenaan pajak :

$R = P.Q = 1000Q - 2Q^2$
$C = 2000 + 1315Q - 59Q^2 + Q^3$

$\pi = R - C = -2000 - 315Q + 57Q^2 - Q^3$
π maksimum pada $Q = 35$ [lihat Kasus 50]
$\pi_{maksimum} = 13.925$
$P_e = 1000 - 2(35) = 930.$

Dengan pengenaan pajak :

Biaya total menjadi $C = 2000 + 1315Q - 59Q^2\ Q^3 + 405Q$.
Fungsi keuntungan yang baru : $\pi = -2000 - 720Q + 57Q^2 - Q^3$
$\pi' = -720 + 114Q - 3Q^2 \qquad \pi'' = 114 - 6Q$
π maksimum jika $\pi' = 0$ dan $\pi'' < 0$
$\pi' = 0 \rightarrow -720 + 114Q - 3Q^2 = 0$

$Q^2 - 38Q + 240 = 0 \rightarrow Q_1 = 8, \quad Q_2 = 30$
$Q = 8 \rightarrow \pi'' = 66$
$Q = 30 \rightarrow \pi'' = -66$ (memenuhi syarat π maksimum)

Jadi, $Q = 30 \rightarrow \pi_{maksimum} = -2000 - 720(30) + 57(30)^2 - (30)^3 = 4.700$
$P_e = 1000 - 2(30) = 940.$

Pajak total yang diterima pemerintah : $T = t.Q = 405(30) = 12.150.$
[Jika dianalisis, dari jumlah 12.150 ini sebesar (10 × 30 =) 300 merupakan beban pajak total yang ditanggung oleh pihak konsumen, 11.850 selebihnya ditanggung oleh pihak produsen alias sang penunggal. Hal ini mencerminkan kebijakan pajak cukup efektif untuk mengendalikan keuntungan produsen monopolis].

Kasus 53

Andaikan seorang produsen monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q = 100 - 5P$ dan biaya totalnya $C = 20 - 4Q + 0{,}1Q^2$. Pemerintah mengenakan pajak atas setiap unit barang yang dijual oleh penunggal ini, dan menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum. Di lain pihak, walaupun barang dagangannya dipajaki, produsen tetap menginginkan operasi bisnisnya menghasilkan keuntungan maksimum. Berapa pajak per unit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya, dan juga keuntungan produsen, maksimum ? Hitunglah masing-masing penerimaan pajak maksimum dan keuntungan maksimum tersebut.

Permintaan : $Q = 100 - 5P \rightarrow P = 20 - 0{,}2Q$
Penerimaan : $R = P.Q = 20Q - 0{,}2Q^2$
Biaya total dengan adanya pajak : $C = 20 - 4Q + 0{,}1Q^2 + tQ$
(t melambangkan pajak per unit)
Keuntungan : $\pi = R - C = -0{,}3Q^2 + 24Q - tQ - 20$
$\pi' = -0{,}6Q + 24 - t$
π maksimum jika $\pi' = 0 \rightarrow -0{,}6Q + 24 - t = 0 \rightarrow Q = (24 - t)/0{,}6$

$T = t.Q = t(24 - t)/0{,}6 = (24t - t^2)/0{,}6$
$T' = dT/dt = (24 - 2t)/0{,}6$
T maksimum bila $T' = 0 \rightarrow (24 - 2t)/0{,}6 = 0 \rightarrow 24 - 2t = 0,\ t = 12$

Jadi, T maksimum bila $t = 12$ [bukti : $T'' = (-2/0{,}6) < 0$]
π maksimum jika $Q = (24 - t)/0{,}6 = (24 - 12)/0{,}6 = 20$
Adapun besarnya $T_{maksimum} = t.Q = 12(20) = 240$
Sedangkan $\pi_{maksimum} = -0{,}3(20)^2 + 24(20) - 12(20) - 20 = 100.$

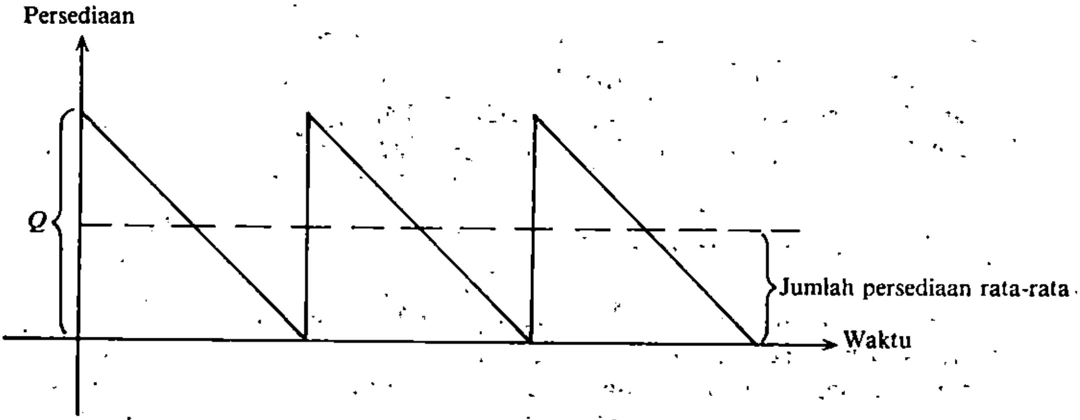
9.6.9 Model Pengendalian Persediaan

Pengendalian persediaan — baik persediaan bahan mentah ataupun persediaan barang jadi — bertujuan meminimumkan biaya total persediaan. Persediaan bahan mentah yang berlebihan akan menimbulkan biaya penyimpanan ekstra, demikian pula persediaan barang jadi yang berlebihan. Di lain pihak, kekurangan persediaan bahan mentah atau bahan baku akan mengganggu kelancaran produksi. Sedangkan kekurangan persediaan barang jadi dapat menyebabkan perusahaan kehilangan pasar.

Secara umum, biaya-biaya yang dikeluarkan berkenaan persediaan terdiri atas : (1) biaya pengadaan atau pemesanan (*setup cost, ordering cost*); (2) biaya penyimpanan (*holding cost, carrying cost, storing cost*), dan (3) biaya kesenjangan (*shortage cost*). Biaya yang terakhir ini timbul apabila terjadi kekurangan atau kesenjangan persediaan, sehingga produksi atau pemasaran lebih lanjut tertunda.

Ada beberapa macam model pengendalian persediaan, tergantung pada pola kedatangan bahan atau pengiriman barangnya. Dalam buku ini hanya akan dibahas salah satu di antaranya, yakni model persediaan dengan kedatangan berkala (*batch arrival model*). [Pembahasan model-model pengendalian persediaan secara lengkap biasanya diberikan dalam matakuliah "operations research".] Dalam membahas dan menerapkan model ini dianggap bahwa kebutuhan atau permintaan akan barang yang dipesan diketahui jumlahnya dan seragam. Kemudian biaya pemesanan dan biaya penyimpanan per unit dianggap tidak tergantung pada jumlah barang. Selanjutnya dianggap pula bahwa tidak pernah terjadi kekurangan persediaan, sehingga tidak ada biaya kesenjangan yang harus dikeluarkan.

Pola kedatangan barang pesanan dalam model ini dicerminkan oleh Gambar 9-14. Kebutuhan barang per periode (D) dibagi pemesanannya menjadi beberapa kali pesanan, dengan jumlah yang sama untuk setiap sub-periode kedatangan (Q), agar biaya total persediaan (C) dapat ditekan menjadi serendah mungkin. Persoalan yang hendak diselesaikan ialah berapa unit barang harus dipesan setiap kali (Q) agar biaya total persediaan (C) minimum, dengan perkataan lain berapa jumlah pesanan yang optimal. Untuk dapat menyelesaikan masalah ini, harus tersedia data mengenai kebutuhan atau permintaan akan barang per periode (D), biaya pemesanan untuk setiap kali pesan (C_1), dan biaya penyimpanan per unit barang per periode (C_2).



Gambar 9—14

Dalam setiap periode terdapat D/Q kali kedatangan pesanan (misalnya 3 angkatan/kedatangan, menurut gambar di atas); biaya total pemesanan adalah $(D/Q)C_1$. Rata-rata sepanjang periode terdapat $Q/2$ persediaan, sehingga biaya penyimpanan per periode adalah $(Q/2)C_2$. Dengan demikian biaya total persediaan per periode adalah :

$$C = \frac{C_1 D}{Q} + \frac{C_2 Q}{2}$$

Biaya total persediaan ini akan minimum jika $dC/dQ = 0$ dan $d^2C/dQ^2 > 0$.

$$\frac{dC}{dQ} = -\frac{C_1 D}{Q^2} + \frac{C_2}{2} \qquad \frac{d^2 C}{dQ^2} = \frac{2\,C_1\,D}{Q^3} > 0$$

Jika $\dfrac{dC}{dQ} = 0$, maka $Q^2 = (2\,C_1 D)/C_2 \rightarrow Q = \sqrt{(2\,C_1\, D)/C_2}$

Jadi, jumlah pesanan optimal (*economic order quantity*) ialah :

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{2\,C_1 D}{C_2}}}$$

Kasus 54

Berdasarkan pengalamannya, seorang kontraktor kecil membutuhkan 100 karung pasir setiap bulan. Biaya pengadaan/pemesanan Rp 1.250,00 setiap kali pesan, sedangkan biaya penyimpanan Rp 100,00 per karung per minggu. Jika ia menginginkan biaya total persediaannya minimum, dengan cara membagi kebutuhan 100 karung pasir per bulan atas beberapa kali kedatangan dengan jumlah sama, berapa jumlah pesanan yang optimal ?

$$\left.\begin{aligned} D &= 100 \\ C_1 &= 1250 \\ C_2 &= 400 \end{aligned}\right\} \quad Q = \sqrt{(2\,C_1 D)/C_2}$$

$$Q = \sqrt{(2)(1250)(100)/400} = \sqrt{250.000/400} = 25$$

Jadi, jumlah pesanan yang optimal ialah 25 karung pasir setiap kali pesan. Berarti kebutuhan per bulan dibaginya menjadi $D/Q = 100/25 = 4$ kali kedatangan (4 angkatan); dengan perkataan lain pesanan untuk kebutuhan bulanan dilakukan secara mingguan. Biaya total persediaannya per bulan adalah :

$$C = \frac{C_2 Q}{2} + \frac{C_1 D}{Q} = \frac{(400)(25)}{2} + \frac{(1250)(100)}{25} = 10.000 \text{ rupiah.}$$

9.6.10 Hubungan Biaya Marjinal dengan Biaya Rata-rata

Dalam ekonomi mikro terdapat hubungan teoretis antara biaya marjinal dan biaya rata-rata, yakni bahwa pada saat biaya rata-rata mencapai nilai minimumnya maka biaya marjinal sama dengan biaya rata-rata minimum tersebut. Secara grafik hal ini ditunjukkan oleh perpotongan kurva biaya marjinal dengan kurva biaya rata-rata pada posisi minimum kurva biaya rata-rata. Secara matematik hubungan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

Andaikan biaya total dinyatakan dengan $C = f(Q)$,
maka :

biaya marjinal : $MC = C' = dC/dQ$
biaya rata-rata : $AC = C/Q$

Syarat yang diperlukan agar AC minimum ialah bahwa derivatif pertamanya sama dengan nol.

Menurut kaidah diferensiasi, jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$$AC = \frac{C}{Q} \rightarrow (AC)' = \frac{QC' - CQ'}{Q^2} = \frac{QC' - C}{Q^2}$$

$[CQ' = C$, sebab jika $Q = Q$ maka $Q' = dQ/dQ = 1]$

Syarat agar AC minimum : $(AC)' = 0 \rightarrow \frac{QC' - C}{Q^2} = 0$

$$\rightarrow QC' - C = 0 \rightarrow QC' = C \rightarrow C' = C/Q$$

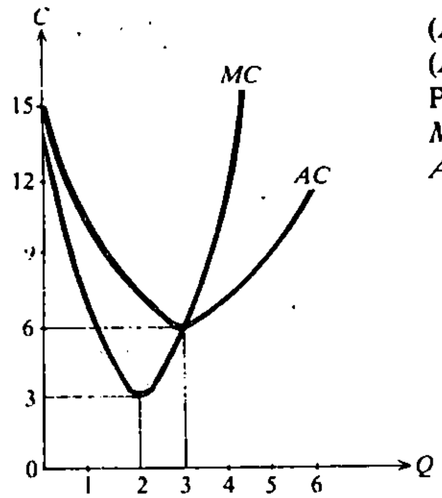
Mengingat $C' \equiv MC$ dan $C/Q \equiv AC$, maka terbuktilah bahwa

pada posisi AC minimum : $MC = AC$, $\frac{dC}{dQ} = \frac{C}{Q}$

Kasus 55

Andaikan $C = Q^3 - 6\,Q^2 + 15\,Q$. Buktikan bahwa biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marjinal.

Biaya marjinal : $MC = C' = dC/dQ = 3\,Q^2 - 12\,Q + 15$
Biaya rata-rata : $AC = C/Q = Q^2 - 6\,Q + 15$



Gambar 9—15

$(AC)' = d\,AC/dQ = 2\,Q - 6$
$(AC)' = 0 \rightarrow 2\,Q - 6 = 0 \rightarrow Q = 3$
Pada $Q = 3$,

$$\left.\begin{array}{l} MC = 3(3)^2 - 12(3) + 15 = 6 \\ AC = (3)^2 - 6(3) + 15 = 6 \end{array}\right\} MC = AC_{min}$$

6.9.11 Hubungan Produk Marjinal dengan Produk Rata-rata

Analog dengan hubungan antara biaya marjinal dan biaya rata-rata, begitu pula hubungan antara produk marjinal dan produk rata-rata. Produk marjinal sama dengan produk rata-rata pada saat produk rata-rata mencapai posisi ekstrimnya (dalam hal ini posisi maksimum).

Andaikan produk total dinyatakan dengan $P = f(X)$,
maka :

produk marjinal : $MP = P' = dP/dX$
produk rata-rata : $AP = P/X$

$$(AP)' = \frac{XP' - PX'}{X^2} = \frac{XP' - P}{X^2}$$

$[PX' = P$, sebab jika $P = P$ maka $P' = dP/dP = 1]$

Agar AP maksimum : $(AP)' = 0 \rightarrow \dfrac{XP' - P}{X^2} = 0 \rightarrow P' = P/X$

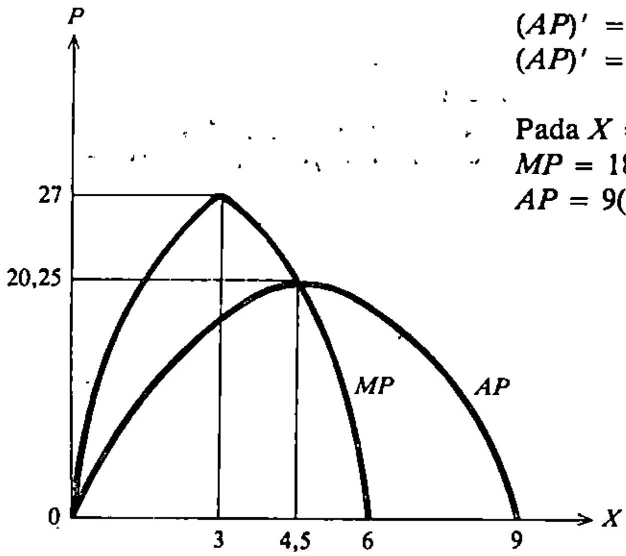
Mengingat $P' \equiv MP$ dan $P/X \equiv AP$, jelaslah bahwa

$$\boxed{\text{pada posisi } AP \text{ maksimum : } MP = AP, \quad \frac{dP}{dX} = \frac{P}{X}}$$

Kasus 56

Andaikan produk total $P = 9\,X^2 - X^3$
maka produk marjinal dan produk rata-ratanya masing-masing adalah :

$MP = P' = dP/dX = 18\,X - 3\,X^2$
$AP = P/X = 9\,X - X^2$



Gambar 9—16

$(AP)' = d\,AP/dX = 9 - 2X$
$(AP)' = 0 \rightarrow 9 - 2X = 0 \rightarrow X = 4,5$

Pada $X = 4,5$,
$MP = 18(4,5) - 3(4,5)^2 = 20,25$
$AP = 9(4,5) - (4,5)^2 = 20,25$

BAB 10
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Dalam bab ini kita akan membahas diferensiasi untuk fungsi-fungsi yang mengandung lebih dari satu macam variabel bebas. Pada dasarnya prinsip diferensiasinya tidak berbeda dengan prinsip diferensiasi untuk fungsi bervariabel bebas tunggal. Hanya saja di sini nanti kita akan bertemu dengan konsep diferensiasi parsial (diferensiasi secara bagian demi bagian) dan konsep diferensiasi total. Mengingat pada umumnya suatu variabel ekonomi berhubungan fungsional terhadap tidak hanya satu macam variabel lain; tetapi justru terhadap beberapa macam variabel sekaligus, pengetahuan akan diferensiasi untuk fungsi majemuk sangat penad (*relevant*) dimiliki.

10.1 DIFERENSIASI PARSIAL

Sebuah fungsi yang hanya mengandung satu variabel bebas hanya akan memiliki satu macam turunan. Apabila $y = f(x)$ maka turunannya hanyalah turunan y terhadap x, dengan kata lain $y' = dy / dx$.

Sedangkan jika sebuah fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas maka turunannya akan lebih dari satu macam pula, sesuai dengan jumlah macam variabel bebasnya. Jadi, jika sebuah fungsi mempunyai n macam variabel bebas maka ia akan memiliki n macam turunan. Jika $y = f(x,z)$ maka akan terdapat dua macam turunan, yaitu turunan y terhadap x atau $\partial y/\partial x$ dan turunan y terhadap z atau $\partial y/\partial z$.*)

Dengan demikian :

1. $y = f(x,z)$

$$y' \begin{cases} \text{a) } f_x(x,z) = \dfrac{\partial y}{\partial x} \\[2ex] \text{b) } f_z(x,z) = \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{cases}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial z}\,dz.$$

2. $p = f(q,r,s)$

$$p' \begin{cases} \text{a) } f_q(q,r,s) = \dfrac{\partial p}{\partial q} \\[2ex] \text{b) } f_r(q,r,s) = \dfrac{\partial p}{\partial r} \\[2ex] \text{c) } f_s(q,r,s) = \dfrac{\partial p}{\partial s} \end{cases}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}\,dq + \frac{\partial p}{\partial r}\,dr + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds$$

$\partial y/\partial x$ dan $\partial y/\partial z$ dalam butir 1 serta $\partial p/\partial q$, $\partial p/\partial r$ dan $\partial p/\partial s$ dalam butir 2 masing-masing dinamakan derivatif parsial. Sedangkan $(\partial y/\partial x)dx$, $(\partial y/\partial z)dz$, $(\partial p/\partial q)dq$, $(\partial p/\partial r)dr$ dan $(\partial p/\partial s)ds$ dinamakan diferensial parsial. Adapun dy dan dp dinamakan diferensial total.

(1) $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$

(2) $\dfrac{\partial y}{\partial z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$

*)Simbol ∂ dibaca "dho", dan bukan "delta". Huruf delta dalam sistem abjad Greek adalah Δ (huruf besar) dan δ (huruf kecil). Simbol ∂ ini hanya ditemukan dalam konteks diferensiasi parsial.

Dalam menurunkan y terhadap x yang dilambangkan dengan $\partial y / \partial x$, hanya suku-suku yang mengandung variabel x yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel x dianggap sebagai konstanta dan turunannya adalah nol. Di lain pihak, dalam menurunkan y terhadap z yang dilambangkan dengan $\partial y / \partial z$, hanya suku-suku yang mengandung variabel z yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel z dianggap konstanta dan turunannya adalah nol.

Sesungguhnya $\partial y/\partial x$ dari $y = f(x,z)$ adalah turunan dari $f(x,z)$ terhadap x dengan anggapan hal-hal lain tetap atau konstan (dalam ekonomi dikenal dengan sebutan asumsi *ceteris paribus*). Oleh karena itu dalam menurunkan $y = f(x,z)$ terhadap x hanya suku-suku yang mengandung variabel x saja yang diturunkan.

10.2 DERIVATIF DARI DERIVATIF PARSIAL

Seperti halnya fungsi dengan satu variabel bebas, fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas pun dapat diturunkan lebih dari satu kali. Dengan kata lain masing-masing turunan parsialnya masih mungkin diturunkan lagi. Turunan berikut dari turunan parsial tadi sudah barang tentu bisa sangat bervariasi, tergantung dari bentuk turunan parsial tersebut. Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam. Akan tetapi bila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang masih mengandung beberapa macam variabel bebas, maka turunan berikutnya masih dapat dipecah-pecah lagi menjadi beberapa turunan parsial pula.

Contoh : $y = x^3 + 5z^2 - 4x^2z - 6xz^2 + 8z - 7$

(1) $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$

(2) $\dfrac{\partial y}{\partial z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$

Dalam contoh ini baik $\partial y / \partial x$ maupun $\partial y / \partial z$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z.

(1a) $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ terhadap x : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 8z$

(1b) $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ terhadap z : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -8x - 12z$

(2a) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap x : $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = -8x - 12z$

(2b) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap z : $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 10 - 12x$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a) dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z.

(1a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6$

(1a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -8$

(1b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -8$

(1b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial z^2} = -12$

(2a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z \partial x^2} = -8$

(2a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial x} = -12$

(2b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial x} = -12$

(2b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = 0$

Sekarang turunan-turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karena masing-masing hanya tinggal mengandung konstanta.

10.3 NILAI EKSTRIM : MAKSIMUM DAN MINIMUM

Nilai-nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya :

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

> Untuk $y = f(x,z)$,
> maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika :
>
> $$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

Syarat di atas adalah syarat yang diperlukan (*necessary condition*) agar fungsinya mencapai titik ekstrim. Guna mengetahui apakah titik ekstrim itu berupa titik maksimum ataukah titik minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan (*sufficient condition*), yakni :

> Maksimum bila $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$
>
> Minimum bila $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$

Dalam hal $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$, tak bisa ditegaskan mengenai nilai ekstrimnya. Untuk kasus semacam ini diperlukan penyelidikan dan pengujian lebih lanjut.*)

Contoh :

1) Selidiki apakah titik ekstrim dari fungsi berikut ini merupakan titik maksimum ataukah titik minimum : $y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 12.$ $\qquad$ $\frac{\partial y}{\partial z} = -2z + 10$

$-2x + 12 = 0, \quad x = 6.$ $\qquad$ $-2z + 10 = 0, \quad z = 5$

$y = -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45 = -36 + 72 - 25 + 50 - 40 = 16$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 < 0$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -2 < 0$

---

*)Lihat : *H. Johannes* dan *Budiono Sri Handoko*, "Pengantar Matematika untuk Ekonomi", LP3ES, Jakarta, 1980, halaman 247 — 251.

Karena $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ dan $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum dengan $y_{maks.} = 16$

2) Selidiki apakah titik ekstrim dari fungsi $p = 3q^2 - 18q + r^2 - 8r + 50$ merupakan titik maksimum ataukah titik minimum.

$\dfrac{\partial p}{\partial q} = 6q - 18$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial p}{\partial r} = 2r + 8$

$6q - 18 = 0, \quad q = 3$ $\qquad\qquad$ $2r - 8 = 0, \quad r = 4$

$$p = 3(3)^2 - 18(3) + (4)^2 - 8(4) + 50$$
$$= 27 - 54 + 16 - 32 + 50 = 7.$$

$\dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2} = 6 > 0$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2} = 2 > 0$

Karena $\dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ dan $\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2} > 0$, titik ekstrimnya adalah titik minimum dengan $p_{min.} = 7$.

10.4 OPTIMISASI BERSYARAT

Dalam kenyataan seringkali kita harus mengekstrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi, yakni mencari nilai maksimum atau nilai minimumnya, tetapi terkekang oleh suatu fungsi lain yang harus dipenuhi. Dengan kata lain fungsi yang hendak dioptimumkan tadi menghadapi suatu kendala (*constraint*). Kasus optimasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya seseorang hendak memaksimumkan utilitas, atau tingkat kepuasannya, tetapi terikat pada fungsi pendapatan; atau sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya, namun terikat pada fungsi produksi.

10.4.1 Pengganda Lagrange

Penghitungan nilai ekstrim sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain, dapat diselesaikan dengan Metoda Lagrange. Caranya ialah dengan membentuk sebuah fungsi baru, disebut fungsi Lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda Lagrange λ dengan fungsi kendalanya.*)

Misalkan hendak dioptimumkan $z = f(x,y)$
dengan syarat harus terpenuhi $u = g(x,y)$
maka fungsi Lagrangenya :

$$\boxed{F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)}$$

Nilai ekstrim $F(x,y,\lambda)$ dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif-parsial pertamanya sama dengan nol.

$$\begin{aligned} F_x\,(x,y,\lambda) &= f_x + \lambda g_x = 0 \\ F_y\,(x,y,\lambda) &= f_y + \lambda g_y = 0 \end{aligned}$$

Pengganda Lagrange λ adalah suatu *variabel tak-tentu* yang hanya bersifat sebagai pembantu. Syarat di atas merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim dari fungsi baru yang dibentuk, dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan atau *necessary condition.* Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut, maksimum ataukah minimum, masih harus disidik melalui derivatif-parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan atau *sufficient condition.* Dalam hal ini nilai ekstrim tadi adalah :

$$\begin{array}{|l|} \hline \text{Maksimum bila } F_{xx} < 0 \text{ dan } F_{yy} < 0 \\ \text{Maksimum bila } F_{xx} > 0 \text{ dan } F_{yy} > 0. \\ \hline \end{array}$$

Contoh :

1) Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$
   Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

   Fungsi Lagrange : $F = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$*)
   $= 2x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$

---

*)Fungsi baru Lagrange dapat pula dibentuk dengan cara mengurangkan fungsi yang hendak dioptimumkan terhadap hasil kali λ dengan fungsi kendala; hasil akhirnya tetap sama, kecuali tanda hasil perhitungan λ.

*)Dalam membentuk fungsi baru Lagrange, fungsi yang menjadi kendala senantiasa harus diimplisitkan dulu.

Agar F ekstrim, $F' = 0$.

$F_x = 2 + 2\lambda x = 0$, diperoleh $\lambda = -\dfrac{1}{x}$ .... (1)

$F_y = 2 + 2\lambda y = 0$, diperoleh $\lambda = -\dfrac{1}{y}$ .... (2)

Berdasarkan (1) dan (2) : $-\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{y}$, atau $x = y$

Menurut fungsi kendala : $x^2 + y^2 = 8$

$y^2 + y^2 = 8$

$2y^2 = 8,\ y^2 = 4,\ y = \pm 2$

Karena $y = \pm 2,\ x = \pm 2$.
$z = 2x + 2y = \pm 8$
Jadi nilai ekstrim $z = \pm 8$.

Penyidikan nilai ekstrimnya :

— Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

$F_{xx} = 2\lambda = -1 < 0$
$F_{yy} = 2\lambda = -1 < 0$
Karena F_{xx} dan $F_{yy} < 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai maksimum dengan $z_{maks.} = 8$.

— Untuk $x = -2$ dan $y = -2$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$

$F_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$
$F_{yy} = 2\lambda = 1 > 0$
Karena F_{xx} dan $F_{yy} > 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min.} = -8$.

2) Optimumkan $z = xy$ dengan syarat $x + 2y = 10$.

$F = xy + \lambda(x + 2y - 10)$
$\quad = xy + \lambda x + 2\lambda y - 10\lambda$

Syarat yang diperlukan agar F optimum, $F' = 0$

$F_x = y + \lambda = 0$, diperoleh $\lambda = -y$

$F_y = x + 2\lambda = 0$, diperoleh $\lambda = -\dfrac{1}{2}x$

$-y = -\frac{1}{2}x$, berarti $2y = x$

$x + 2y = 10$
$2y + 2y = 10$, diperoleh $y = 2,5$. Selanjutnya $x = 5$.

Jadi, z optimum pada $x = 5$ dan $y = 2,5$;
dengan $z_{opt.} = xy = (5)(2,5) = 12,5$.

10.4.2 Kondisi Kuhn-Tucker

Metoda Kuhn-Tucker merupakan pengembangan lebih lanjut dari model optimisasi bersyarat. Jika dalam metoda pengganda Lagrange kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhadap kendala yang berbentuk persamaan, maka dalam metoda Kuhn-Tucker kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhadap sebuah fungsi yang berbentuk pertidaksamaan. Bentuk permasalahannya biasanya berupa :

Maksimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(z,y) \leqslant 0$
atau
Minimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(x,y) \geqslant 0$

Prosedur penyelesaiannya dapat ditempuh melalui dua macam cara, yakni melalui metoda Lagrange yang dimodifikasikan kemudian diuji dengan kondisi (persyaratan) Kuhn-Tucker, atau secara langsung dengan menggunakan metoda Kuhn-Tucker sendiri.

Prosedur metoda Kuhn-Tucker melalui metoda Lagrange yang dimodifikasikan dilakukan sebagai berikut :

(1) Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kemudian selesaikan masalahnya dengan metoda Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum yang dicari [khusus dalam hal ini fungsi baru Lagrangenya harus dibentuk dengan cara : $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$; jadi, tidak boleh : $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$].

(2) Lakukan pengujian terhadap nilai λ. Jika $\lambda > 0$ berarti nilai optimum yang diperoleh (berdasarkan kendala yang telah dimodifikasikan) tadi juga merupakan nilai optimum berkenaan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leqslant 0$ berarti optimisasi fungsi tujuan $f(x,y)$ tanpa menyertakan fungsi kendala $g(x,y)$, sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya. [Dalam hal $\lambda \leqslant 0$ kendala yang bersangkutan dikatakan bersifat tidak mengikat (*non-binding*), oleh karenanya dapat diabaikan; dalam hal $\lambda > 0$ kendalanya disebut mengikat (*binding*)].

Sedangkan prosedur metoda Kuhn-Tucker secara langsung dilakukan sebagai berikut :

(1) Rumuskan permasalahannya, misalnya maksimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \leq 0$, atau minimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \geq 0$.*)

(2) Tetapkan kondisi Kuhn-Tucker :

(a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$

(b) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$

(c) $\lambda g(x,y) = 0$ di mana $g(x,y) \leq 0$ atau $g(x,y) \geq 0$.

(3) Ujilah (2c) masing-masing untuk $\lambda = 0$ dan $g(x,y) = 0$ guna menentukan mana di antaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala $g(x,y)$. Nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$.

Contoh :

(1) **Maksimumkan $f(x,y) = 10xy - 2{,}5x^2 - y^2$ terhadap kendala $x + y \leq 9$.**

Dengan menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan ($x + y \leq 9$ menjadi $x + y = 9$), maka berdasarkan metoda Lagrange :

$$F(x,y,\lambda) = 10xy - 2{,}5x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 9)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \rightarrow 10y - 5x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10y - 5x \\ F_y = 0 \rightarrow 10x - 2y - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10x - 2y \end{array}\right\} x = 0{,}8y$$

Menurut kendala : $x + y = 9 \rightarrow 0{,}8y + y = 9 \rightarrow y = 5$
$y = 5 \rightarrow x = 0{,}8(5) = 4 \rightarrow$ sehingga $f(x,y)_{maks.} = 135$.
$\lambda = 10(5) - 5(4) \equiv 10(4) - 2(5) = 30$.

Karena $\lambda > 0$ berarti $x = 4$ dan $y = 5$, yang memaksimumkan $f(x,y)$ terhadap kendala yang (dianggap) berbentuk persamaan, berlaku juga terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

Dengan metoda kondisi Kuhn-Tucker langsung di mana $g(x,y) = x + y - 9 \leq 0$:

---

*)Rumusan permasalahan mungkin juga berbentuk maksimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \geq 0$, atau minimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \leq 0$.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow 10y - 5x - \lambda = 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow 10x - 2y - \lambda = 0$

(c) $\lambda g = 0 \rightarrow \lambda(x + y - 9) = 0$ di mana $g = x + y - 9 \leqslant 0$

Jika $\lambda = 0$, maka $x = y = 0$ agar persamaan (a) dan (b) terpenuhi, dan kendala $x + y \leqslant 9$ juga terpenuhi; dalam hal ini $f(0,0) = 0$.

Jika $x + y - 9 = 0$, maka $x = 9 - y$, sehingga :

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } 10y - 5x - \lambda = 0 \rightarrow 10y - 45 + 5y - \lambda = 0 \\ \text{(b) } 10x - 2y - \lambda = 0 \rightarrow 90 - 10y - 2y - \lambda = 0 \end{array}\right\} y = 5 \text{ dan } \lambda = 30$$

Dengan memasukkan $y = 5$ dan $\lambda = 30$ ke dalam (a) dan (b), diperoleh $x = 4$. Untuk $x = 4$ dan $y = 5$, $f(x,y) = 10(4)(5) - 2{,}5(4)^2 - (5)^2 = 135$. Jadi, sesuai dengan penyelesaian melalui metoda Lagrange sebelumnya, x dan y yang memaksimumkan $f(x,y)$ terhadap kendala pertidaksamaan $x + y \leqslant 9$ adalah $x = 4$ dan $y = 5$.

[Dalam pengujian $\lambda = 0$ sebelumnya kita juga menemukan bahwa $f(x,y)$ maksimum pada $x = y = 0$. Namun karena $f(4,5) > f(0,0)$, sedangkan kasusnya adalah maksimisasi, maka $f(4,5)$ lah yang dipilih].

(2) Maksimumkan $f(x,y) = \dfrac{20x}{x + 5} + \dfrac{10y}{y + 10} - x - y$ terhadap $x + y \leqslant 15$.

Dengan menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan, maka menurut metoda Lagrange :

$$F(x,y,\lambda) = \frac{20x}{x + 5} + \frac{10y}{y + 10} - x - y - \lambda(x + y - 15)$$

$$F_x = 0 \rightarrow \frac{(x + 5)20 - 20x}{(x + 5)^2} - 1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{100}{(x + 5)^2} - 1 \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$F_y = 0 \rightarrow \frac{(y + 10)\,10 - 10y}{(y + 10)^2} - 1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{100}{(y + 10)^2} - 1 \ldots. \quad \text{(ii)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Menurut (i) dan (ii)} : (x + 5)^2 = (y + 10)^2 \\ \text{Menurut kendala} : x + y = 15,\ y = 15 - x \end{array}\right\} \text{diperoleh } x = 10 \text{ dan } y = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{nilai maksimum } f(x,y) = 1{,}67 \\ \text{nilai } \lambda = -4/9. \end{array}$$

Karena $\lambda < 0$ berarti $x = 10$ dan $y = 5$ tidak berlaku untuk maksimisasi $f(x,y)$ terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Dalam hal ini persoalan cukup diselesaikan dengan memaksimumkan $f(x,y)$ tanpa memperhatikan $g(x,y)$, mengingat kendala ini tidak mengikat.

$$f_x = 0 \rightarrow \frac{(x+5)\,20 - 20\,x}{(x+5)^2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{100}{(x+5)^2} - 1 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$f_y = 0 \rightarrow \frac{(y+10)\,10 - 10y}{(y+10)^2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{100}{(y+10)^2} - 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

Jadi, untuk $g(x,y) = x + y \leqslant 15$, $f(x,y)$ maksimum pada $x = 5$ dan $y = 0$; nilai maksimum $f(x,y) = 5$.

Prosedur penyelesaian langsung dengan kondisi Kuhn-Tucker :

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow \dfrac{100}{(x+5)^2} - 1 - \lambda = 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow \dfrac{100}{(y+10)^2} - 1 - \lambda = 0$

(c) $\lambda g = 0 \rightarrow \lambda(x + y - 15) = 0$ di mana $g = x + y - 15 \leqslant 0$

Jika $\lambda = 0$, maka menurut (a) : $100 = (x+5)^2$, sehingga $x = 5$; sedangkan menurut (b) : $100 = (y+10)^2$, sehingga $y = 0$. Dengan $x = 5$ dan $y = 0$ ini kendala $x + y \leqslant 15$ terpenuhi; adapun $f(x,y) = 5$.

Jika $x + y - 15 = 0$, maka $y = 15 - x$, sehingga berdasarkan (a) dan (b) diperoleh $x = 10$ dan $y = 5$ (lihat penyelesaian sebelumnya melalui metoda Lagrange); adapun $f(x,y) = 1{,}67$. Dalam hal ini kendala $x + y \leqslant 15$ juga terpenuhi. Namun mengingat $f(5, 0) > f(10, 5)$, sedangkan masalah kita di sini adalah maksimisasi, maka yang paling memenuhi syarat ialah kedudukan $x = 5$ dan $y = 0$.

(3) Minimumkan $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$ terhadap $x + y \geqslant 8$.
Kondisi Kuhn-Tucker :

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow 2x - y - \lambda = 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow -x + 4y - \lambda = 0$

(c) $\lambda g = 0 \rightarrow \lambda(x + y - 8) = 0$ di mana $g = x + y - 8 \geqslant 0$

Jika $\lambda = 0$, maka agar (a) dan (b) terpenuhi haruslah $x = y = 0$, akan tetapi kemudian kendala $x + y \geqslant 8$ tidak terpenuhi. Berarti $\lambda = 0$ (atau $x = y = 0$) tidak meminimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \geqslant 0$.

Jika $x + y - 8 = 0$, dengan kata lain $y = 8 - x$, maka berdasarkan

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & 3x - 8 - \lambda = 0 \\ \text{(b)} & -5x + 32 - \lambda = 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ \lambda = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{selanjutnya } y = 3 \\ \text{dan } f(x,y)_{min} = 28\end{array}$$

Dengan $x = 5$ dan $y = 3$ kendala $x + y \geqslant 8$ terpenuhi. Jadi, x dan y yang meminimumkan $f(x,y)$ terhadap $x + y \geqslant 8$ adalah $x = 5$ dan $y = 3$.

Optimisasi bersyarat versi Kuhn-Tucker dapat pula digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang melibatkan lebih dari satu fungsi kendala. Ini merupakan kelebihannya dibandingkan metoda Lagrange.

10.5 HOMOGENITAS FUNGSI

Suatu fungsi dikatakan homogen berderajat n apabila hasilkali setiap variabel bebasnya dengan sebarang bilangan λ menyebabkan nilai fungsinya menjadi λ^n kali. Dengan demikian, $z = f(x,y)$ dikatakan homogen apabila.

$$\lambda^n z = f(\lambda x, \lambda y)$$

Contoh :

1) $z = f(x,y) = 2x^3 - 4x^2y + y^3$

adalah fungsi homogen berderajat 3, karena

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 2\lambda^3 x^3 - 4\lambda^3 x^2 y + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3 (2x^3 - 4x^2y + y^3) \\ &= \lambda^3 f(x,y) \\ &= \lambda^3 z \end{aligned}$$

2) $z = f(x,y) = 5x^2 + xy - 3y^2$

adalah fungsi homogen berderajat 2, karena

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 5\lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy - 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (5x^2 + xy - 3y^2) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \\ &= \lambda^2 z. \end{aligned}$$

3) $z = f(x,y) = 9x - 7y$

adalah fungsi homogen berderajat 1, karena

$$f(\lambda x, \lambda y) = 9\lambda x - 7\lambda y = \lambda(9x - 7y) = \lambda z.$$

Fungsi homogen berderajat satu disebut juga fungsi homogen linear. Perihal homogenitas fungsi merupakan bahasan penting dalam teori produksi. Dengan diketahuinya derajat homogenitas suatu fungsi produksi, akan dapat diketahui pula tingkat penambahan hasil produksi atas penambahan faktor produksi yang digunakan.

Latihan Diferensiasi Parsial

1. Untuk fungsi $y = f(x,z) = 4x^2 - 6x^2z + 3xz^2 + 3z^2 + 5$, tentukan :
   (a) derivatif parsial,
   (b) diferensial parsial, dan
   (c) diferensial totalnya.

2. Tentukan sampai dengan derivatif-parsial kedua untuk fungsi-fungsi :
   (a) $y = 3x^2 - 5z^2 + 2x^2z - 4xz^2 - 9z$
   (b) $y = 6x^2 + 4\dfrac{x^2}{z} - 3z + 25$

3. Hitunglah y ekstrim dari fungsi $y = 2x^2 - 20x + z^2 - 8z + 78$, dan selidiki apakah nilai y ekstrim tersebut merupakan nilai maksimum ataukah nilai minimum.

4. Hitunglah p ekstrim dari fungsi $p = -q^2 - 3r^2 + 6q + 24r - 50$, dan selidiki apakah nilai p ekstrim tersebut merupakan nilai maksimum ataukah nilai minimum.

5. Optimumkan $z = 4x - 2y$ dengan syarat $x^2 - y^2 = 20$.
   Jelaskan apakah z optimumnya merupakan z maksimum ataukah z minimum.

6. Maksimumkan $f(r,s) = r^2 - 10s^2$ terhadap $r - s = 18$.

7. Maksimumkan $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ jika $x + y \leq 13$.

8. Minimumkan $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 6y$ jika $x + 2y \geqslant 18$.

9. Minimumkan $f(x,y) = 6x^2 + 3y^2$ jika :
   (a) $x + y = 18$
   (b) $x + y \geqslant 18$.

10. Maksimumkan $f(x,y) = 5xy + x^2 - 4y^2$ jika :
   (a) $2x + 3y = 74$
   (b) $2x + 3y \leqslant 74$.

10.6 PENERAPAN EKONOMI

Pendekatan diferensiasi parsial sangat bermanfaat untuk diterapkan pada model-model ekonomi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, dalam hal kita hendak menelaah secara parsial pengaruh dari salah satu variabel bebas tadi terhadap variabel terikatnya.

10.6.1 Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan akan masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua macam barang tersebut. Dengan perkataan lain jika barang *A* dan barang *B* mempunyai hubungan penggunaan, maka :

$$Q_{da} = f(P_a, P_b) \quad \text{dan} \quad Q_{db} = f(P_a, P_b)$$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, di mana :

$\dfrac{\partial Q_{da}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan P_a

$\dfrac{\partial Q_{da}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan P_b

$\dfrac{\partial Q_{db}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan *B* berkenaan dengan P_a

$\dfrac{\partial Q_{db}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini terdapat dua macam elastisitas permintaan, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri (*elastisitas harga-permintaan*), dan elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang lain (*elastisitas silang-permintaan*).

$$\eta_{da} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\, P_a} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_a} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\, P_b} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_b} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$$\eta_{ab} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\, P_b} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_b} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\, P_a} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_a} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

η_{da} dan η_{db} keduanya merupakan elastisitas harga-permintaan. Sedangkan η_{ab} dan η_{ba} keduanya adalah elastisitas silang permintaan. Jika baik η_{ab} maupun η_{ba} keduanya negatif ($\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas keduanya. Sedangkan jika baik η_{ab} maupun η_{ba} keduanya positif ($\eta_{ab} > 0$ dan $\eta_{ba} > 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah kompetitif/substitutif atau saling menggantikan; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya.

Kasus 57

Fungsi permintaan akan barang *A* dan barang *B* masing-masing ditunjukkan oleh $Q_{da} \cdot P_a^2 \cdot P_b^3 - 1 = 0$ dan $Q_{db} \cdot P_a^3 \cdot P_b - 1 = 0$.
Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut ?

$$Q_{da} \cdot P_a^2 \cdot P_b^3 - 1 = 0 \qquad\qquad Q_{db} \cdot P_a^3 \cdot P_b - 1 = 0$$

$$Q_{da} = \frac{1}{P_a^2 \cdot P_b^3} \qquad\qquad Q_{db} = \frac{1}{P_a^3 \cdot P_b}$$

$$Q_{da} = P_a^{-3}.P_b^{-2} \qquad\qquad Q_{db} = P_a^{-3}.P_b^{-1}$$

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} = -2\,P_a^{-3}.P_b^{-3} \qquad\qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} = -P_a^{-3}.P_b^{-2}$$

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} = -3\,P_a^{-2}.P_b^{-4} \qquad\qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} = -3\,P_a^{-4}.P_b^{-1}$$

$$\eta_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}} = -2P_a^{-3}.P_b^{-3} \cdot \frac{P_a}{P_a^{-2}.P_b^{-3}} = -2$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}} = -P_a^{-3}.P_b^{-2} \quad \frac{P_b}{P_a^{-3}.P_b^{-1}} = -1$$

$$\eta_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}} = -3P_a^{-2}.P_b^{-4} \cdot \frac{P_b}{P_a^{-2}.P_b^{-3}} = -3$$

$$\eta_{ba} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}} = -3\,P_a^{-4}.P_b^{-1} \cdot \frac{P_a}{P_a^{-3}.P_b^{-1}} = -3$$

Barang *A* adalah barang elastis karena $\eta_{da} > 1$. Sedangkan *B* adalah barang yang *unitary-elastic* karena $\eta_{db} = 1$. (Ingat : dalam menafsirkan elastisitas harga-permintaan cukup dengan melihat besarnya angka hasil perhitungan. Tandanya tak perlu dihiraukan). Adapun hubungan antara *A* dan *B* adalah bersifat komplementer karena $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$.

10.6.2 Perusahaan dengan Dua Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam *output*, dan biaya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua macam produk itu merupakan biaya produksi gabungan (*joint production cost*), maka penghitungan keuntungan maksimum yang diperolehnya dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensiasi parsial. Dengan metode serupa, pendekatan ini dapat pula digunakan untuk menganalisis kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari dua macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, *A* dan *B*, di mana fungsi permintaan akan masing-masing barang dicerminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_b)$, maka

Penerimaan dari memproduksi *A* : $R_a = Q_a \cdot P_a = f(Q_a)$
Penerimaan dari memproduksi *B*: $R_b = Q_b \cdot P_b = f(Q_b)$

Penerimaan total : $R = R_L + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$
Dengan biaya total $C = f(Q_a, Q_b)$, fungsi keuntungannya :
$\pi = R - C = f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b) = g(Q_a, Q_b)$
π maksimum bila $\pi' = 0$.

$$(1)\ \pi_{Q_a} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0$$

$$(2)\ \pi_{Q_b} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0$$

Dari (1) dan (2) nilai Q_a dan nilai Q_b dapat diperoleh. Selanjutnya nilai π maksimum bisa dihitung.

Kasus 58

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang, *A* dan *B*, ditunjukkan oleh $C = Q_a^2 + 3\,Q_b^2 + Q_a \cdot Q_b$. Harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$ sedangkan $P_b = 20$. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan besarnya keuntungan maksimum tersebut.

$$\left.\begin{aligned} R_a &= Q_a \cdot P_a = 7\,Q_a \\ R_b &= Q_b \cdot P_b = 20\,Q_b \end{aligned}\right\} R = R_a + R_b = 7\,Q_a + 20\,Q_b$$

$\pi = R - C = 7\,Q_a + 20\,Q_b - Q_a^2 - 3\,Q_b^2 - Q_a \cdot Q_b$

Agar π maksimum, $\pi' = 0$

$$(1)\quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0 \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0$$

$$(2)\quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0 \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

$$\begin{aligned} \pi \text{ maksimum} &= 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a \cdot Q_b \\ &= 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3) = 37. \end{aligned}$$

Jadi agar keuntungan maksimum, perusahaan harus memproduksi 2 unit *A* dan 3 unit *B* dengan keuntungan sebesar 37.
Kasus di mana perusahaan memproduksi lebih dari satu macam barang dengan biaya produksi gabungan, dapat pula diselesaikan melalui nilai-nilai marjinalnya; yakni dengan memformulasikan penerimaan marjinal masing-masing barang sama dengan biaya marjinal barang yang bersangkutan, $MR = MC$.

Berkenaan dengan soal tadi, π maksimum akan diperoleh bila :

$$MR_a = MC_a \text{ dan } MR_b = MC_b$$

$$\begin{aligned} R &= 7Q_a + 20Q_b & \qquad C &= Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a \cdot Q_b \\ MR_a &= R_a' = 7 & MC_a &= C_a' = 2Q_a + Q_b \\ MR_b &= R_b' = 20 & MC_b &= C_b' = 6Q_b + Q_a \end{aligned}$$

$MR_a = MC_a \rightarrow 7 = 2Q_a + Q_b \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0$ .... (1)

$MR_b = MC_b \rightarrow 20 = 6Q_b + Q_a \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0$ .... (2)

Dari (1) dan (2), $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$, selanjutnya $\pi = 37$.

10.6.3 Utilitas Marjinal Parsial dan Keseimbangan Konsumsi

Dalam kenyataan sehari-hari, seorang konsumen tidak hanya mengkonsumsi satu macam barang tetapi berbagai macam. Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan U dan barang-barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan q_i ($i = \,, 2, \ldots, n$), maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n)$.

Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkonsumsi dua macam barang, katakanlah X dan Y, maka fungsi utilitasnya adalah :

$$\boxed{U = f(x,y)}$$

Derivatif pertama dari U merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang X.

$\frac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang Y.

Untuk U = konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ merupakan suatu persamaan kurva indiferensi (*indifference curve*), yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang X dan Y yang memberikan tingkat tingkat kepuasan yang sama.

Keseimbangan Konsumsi. Keseimbangan konsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indiferensi dengan garis anggaran konsumen (*budget line*). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen. Jika pendapatan konsumen berjumlah M serta harga barang X dan barang Y masing-masing P_x dan P_y per unit, persamaan *budget line*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = x.P_x + y.P_y$.

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan Metoda Lagrange. Dalam hal ini, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = x.P_x + y.P_y$. Analog dengan penyelesaian keseimbangan produksi sebagaimana diuraikan pada seksi sesudah ini, diperoleh fungsi baru Lagrange :

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda(x.P_x + y.P_y - M)$$

Agar F maksimum :

$$F_x(x, y) = 0 \rightarrow f_x(x, y) + \lambda P_x = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$F_y(x, y) = 0 \rightarrow f_y(x, y) + \lambda P_y = 0 \ldots\ldots (2)$$

Selanjutnya perhatikan :

Utilitas total : $U = f(x, y)$
Utilitas marjinal : $MU = U' = f'(x, y)$

(i) utilitas marjinal barang X : $MU_X = f_x(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}$

(ii) utilitas marjinal barang Y : $MU_Y = f_y(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}$

Menurut (1) : $f_x(x, y) + \lambda P_x = 0 \rightarrow -\lambda = \dfrac{f_x(x, y)}{P_x}$

Menurut (2) : $f_y(x, y) + \lambda P_y = 0 \rightarrow -\lambda = \dfrac{f_y(x, y)}{P_y}$

Dari (1) dan (2),

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{f_x(x, y)}{P_x} = \dfrac{f_y(x, y)}{P_y} \\ \\ \dfrac{MU_X}{P_x} = \dfrac{MU_Y}{P_y} \end{array}}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa keseimbangan konsumsi akan tercapai apabila hasilbagi utilitas marjinal masing-masing barang terhadap harganya bernilai sama.

Kasus 59

Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1.000 rupiah, harga X dan harga Y per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.

a) Bentuklah fungsi utilitas marjinal untuk masing-masing barang.
b) Berapa utilitas marjinal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y ?
c) Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y kepuasan konsumen optimum ataukah tidak.

a) $U = x^2 y^3$

$$MU_X = U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2\,xy^3$$

$$MU_Y = U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 3\,x^2 y^2$$

b) Jika $x = 14$ dan $y = 13$,

$$MU_X = 2(14)(13)^3 = 61.516$$
$$MU_Y = 3(14)^2(13)^2 = 99.372$$

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460{,}64$$

$$\frac{MU_Y}{P_y} = \frac{99.372}{50} = 1.987{,}44 \qquad \frac{MU_X}{P_x} \neq \frac{MU_Y}{P_y}$$

Berarti kombinasi konsumsi 14 unit X dan 13 unit Y tidak memberikan kepuasan optimum, tidak terjadi keseimbangan konsumsi.

Kasus 60

Untuk soal Kasus 59 di atas, hitunglah kombinasi konsumsi X dan Y yang memberikan kepuasan optimum, serta besarnya nilai kepuasan optimum. Buktikan pula bahwa pada tingkat kepuasan optimum tersebut $MU_X/P_x = MU_Y/P_y$.

$$\left.\begin{array}{l} U = x^2 y^3 \\ 25\,x + 50\,y - 1.000 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(x,y) = x^2 y^3 + \lambda(25\,x + 50\,y - 1.000) \\ \qquad\;\; = x^2 y^3 + 25\,\lambda x + 50\,\lambda y - 1.000\,\lambda \end{array}$$

Agar F maksimum :

$$F_x = 2\,xy^3 + 25\,\lambda = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{2\,xy^3}{25} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F_y = 3\,x^2 y^2 + 50\,\lambda = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{3\,x^2 y^2}{50} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2),

$$\frac{2xy^3}{25} = \frac{3y^2y^2}{50} \rightarrow 100xy^3 = 75x^2y^2, \quad y = \frac{3}{4}x$$

$$25x + 50\,y - 1.000 = 0$$

$$25x + 50\left(\frac{3}{4}x\right) = 1.000 \rightarrow x = 16$$

$$y = \frac{3}{4}x = 2$$

$U = x^2y^3 = (16)^2\ (12)^3 = 442.368.$

Kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum adalah 16 unit X dan 12 unit Y, dengan nilai kepuasan $U = 442.368$.

Untuk $x = 16$ dan $y = 12$,

$MU_X = 2xy^3 = 2(16)(12)^3 = 55.296$
$MU_Y = 3x^2y^2 = 3(16)^2\ (12)^{12} = 110.592$
$MU_X/P_x = 55.296/25 = 2.211{,}84$

$MU_Y/P_y = 110.592/50 = 2.211{,}84$ terbukti.

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{MU_Y}{P_y}$$

10.6.4 Produk Marjinal Parsial dan Keseimbangan Produksi

Untuk memproduksi sesuatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, mesin-mesin dan sebagainya. Jika jumlah keluaran yang dihasilkan dilambangkan dengan P dan masukan yang digunakan dilambangkan dengan x_i ($i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots, n$), maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi $P = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n)$.

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara sebagian lainnya adalah masukan variabel. Selanjutnya jika untuk memproduksi suatu barang dianggap hanya ada dua macam masukan variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan

$$\boxed{P = f(k, l)}$$

Derivatif pertama dari P merupakan produk marjinal parsialnya.

$\dfrac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan masukan K

$\dfrac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan masukan L

Untuk P = konstanta tertentu, fungsi produksi $P = f(k, l)$ merupakan suatu persamaan *isoquant*, yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan masukan K dan L yang menghasilkan keluaran dalam jumlah sama.

Keseimbangan Produksi. Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah (*least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *isocost* dengan *isoquant*. *Isocost* adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan berkenaan dengan harga masing-masing masukan dan jumlah dana yang dimilikinya. Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli masukan K dan masukan L adalah sebesar M, serta harga masukan K dan masukan L masing-masing P_k dan P_l, persamaan *isocost*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = k \,.\, P_k + l \,.\, P_l$.

Tingkat kombinasi penggunaan masukan yang optimum atau "least cost combination" dapat dicari dengan metoda Lagrange. Dalam hal ini fungsi produksi $P = f(k, l)$ dimaksimumkan terhadap fungsi *isocost* $M = k.\, P_k + l.\, P_l$.

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(k, l)$

Fungsi kendala yang dihadapi : $M = k.\, P_k + l.\, P_l$.

$k \,.\, P_k + l \,.\, P_l - M = 0$

Fungsi baru Lagrange : $F(k, l) = f(k, l) + \lambda(k \,.\, P_k + l \,.\, P_l - M)$

Syarat yang diperlukan agar $F(k, l)$ maksimum :

$F_k(k,l) = 0 \rightarrow f_k(k,l) + \lambda P_k = 0$ .... (1)

$F_l(k,l) = 0 \rightarrow f_l(k,l) + \lambda P_l = 0$ .... (2)

Dari (1) dan (2) nilai k dan nilai l dapat diperoleh. Selanjutnya nilai p maksimum bisa dihitung.

Sekarang perhatikan :

Produksi total : $P = f(k,l)$

(i) produk marjinal masukan $K : MP_K = f_k(k,l) = \dfrac{\partial P}{\partial k}$

(ii) produk marjinal masukan $L : MP_L = f_l(k,l) = \dfrac{\partial P}{\partial l}$

Pengembangan lebih lanjut persamaan (1) dan (2) di atas tadi akan menghasilkan :

(1) $f_k(k,l) + \lambda P_k = 0 \rightarrow f_k(k,l) = -\lambda P_k, \quad -\lambda = \dfrac{f_k(k,l)}{P_k}$

(2) $f_l(k,l) + \lambda P_l = 0 \rightarrow f_l(k,l) = -\lambda P_l, \quad -\lambda = \dfrac{f_l(k,l)}{P_l}$

Dengan demikian, syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan :

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{f_k(k,l)}{P_k} = \frac{f_l(k,l)}{P_l} \\ \frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l} \end{gathered}}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa produksi optimum dengan kombinasi biaya terendah akan tercapai apabila hasilbagi produk marjinal masing-masing masukan terhadap harganya bernilai sama.

Kasus 61

Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6\,k^{2/3}\,l^{1/3}$. Bentuklah fungsi produk marjinal untuk masing-masing faktor produksi. Berapa produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit K dan 27 unit L ?

$P = 6\,k^{2/3}\,l^{1/3}$

$MP_K = P_k = \dfrac{\partial P}{\partial k} = 4\,k^{-1/3}\,l^{1/3} = \dfrac{4\,l^{1/3}}{k^{1/3}}$

Jika $k = 8$ dan $l = 27$,

$$MP_K = \frac{4(27)^{1/3}}{8^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

$$MP_L = \frac{2(8)^{2/3}}{27^{2/3}} = \frac{2\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{2\,(4)}{9} = \frac{8}{9}$$

Kasus 62

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan K dan masukan L. Harga per unit masukan K adalah 4 rupiah dan masukan L adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya $P = 12\,kl$. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan berapa unit keluaran yang dihasilkannya dari kombinasi tersebut ?

Fungsi produksi yang hendak dioptimumkan : $P = f(k, l) = 12\,kl$
Fungsi *isocost* yang menjadi kendala : $M = k.P_k + l.P_l$

$$96 = 4\,k + 3\,l,$$
$$96 - 4\,k - 3\,l = 0.$$

Fungsi Lagrange :

$$F(k, l) = 12\,kl + \lambda(96 - 4\,k - 3\,l)$$
$$= 12\,kl + 96\,\lambda - 4\,\lambda k - 3\,\lambda l$$

Agar F maksimum, $F_k = 0$ dan $F_l = 0$

$$\left.\begin{aligned} F_k(k, l) &= 12\,l - 4\,\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3\,l \\ F_l(k, l) &= 12\,k - 3\,\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4\,k \end{aligned}\right\} 3\,l = 4\,k$$

$$96 = 4\,k + 3\,l$$
$$96 = 4\,k + 4\,k \rightarrow 96 = 8\,k \rightarrow k = 12$$
$$l = 4/3\,(12) = 16$$
$$P = 12\,kl = 12(12)(16) = 2304.$$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit K dan 16 unit L, dengan hasil produksi 2304 unit.

Kasus 63

Buktikan bahwa, dengan menggunakan data pada soal Kasus 60 di atas, untuk mencari tingkat produksi optimum berlaku ketentuan $MP_K / P_k = MP_L / P_l$.

$$P = 12\,kl \rightarrow MP_K = \frac{\partial P}{\partial k} = 12\,l \text{ dan } MP_L = \frac{\partial P}{\partial l} = 12\,k$$

Untuk $P_k = 4$, $P_l = 3$, $k = 12$ dan $l = 16$:

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l} \rightarrow \frac{12\,l}{4} = \frac{12\,k}{3} \rightarrow \frac{12(16)}{4} = \frac{12(12)}{3} \text{ terbukti}$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

BAB 11
INTEGRAL

Dalam kalkulus integral dikenal dua macam pengertian integral, mereka adalah integral taktentu (*indefinite integral*) dan integral tertentu (*definite integral*). Integral taktentu adalah kebalikan dari diferensial, yakni suatu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan suatu fungsi asal apabila turunan atau derivatif dari fungsinya diketahui. Sedangkan integral tertentu merupakan suatu konsep yang berhubungan dengan proses pencarian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu.

11.1 INTEGRAL TAKTENTU

Mengintegralkan suatu fungsi turunan $f(x)$ berarti adalah mencari integral atau turunan-antinya, yaitu $F(x)$.

Bentuk umum integral dari $f(x)$ adalah :

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + k}$$

di mana k adalah sembarang konstanta yang nilainya tidak tertentu. Dalam rumusan di atas, tanda $\int$ adalah *tanda integral; $f(x)\,dx$* adalah *diferensial dari $F(x)$*; $f(x)$ sendirian disebut *integran; dx* sendirian disebut diferensial; $F(x)$ adalah *integral partikular; k* adalah *konstanta pengintegralan*; dan $F(x) + k$ merupakan fungsi asli atau fungsi asal. Proses mengintegralkan disebut juga integrasi.

Dalam diferensial kita menemukan, bahwa jika misalnya suatu fungsi asal dilambangkan dengan $F(x)$ dan fungsi turunannya dilambangkan dengan $f(x)$ maka

untuk fungsi asal : $F(x) = x^2 + 5$

fungsi turunannya : $f(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx} = 2x$

Jika prosesnya dibalik, yakni fungsi turunan $f(x)$ diintegralkan, maka

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + k = x^2 + k}$$

Karena derivatif dari setiap konstanta adalah nol, maka dalam mengintegralkan setiap fungsi turunan konstanta k tetap dalam bentuk k. Artinya nilai konstanta tersebut tidak dengan sendirinya bisa diisi dengan bilangan tertentu (misalnya 5, dalam contoh tadi), kecuali jika di dalam soal memang sudah ditentukan nilai konstantanya. Karena ketidaktentuan nilai konstanta itulah maka bentuk integral yang merupakan kebalikan dari diferensial dinamakan integral taktentu.

11.2 KAIDAH-KAIDAH INTEGRASI TAKTENTU

Karena integrasi taktentu pada dasarnya merupakan kebalikan dari diferensiasi, maka kaidah-kaidah integrasi taktentu akan dapat dipahami berdasarkan pengetahuan tentang kaidah-kaidah diferensiasi.

Kaidah 1. Formula pangkat

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k} \qquad n \neq -1$$

Contoh :

(1) $\int x^4\,dx = \dfrac{x^{4+1}}{4+1} + k = \dfrac{x^5}{5} + k = 0{,}2\,x^5 + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(0{,}2\,x^5 + k) = x^4$

(2) $\int 4\, dx = \dfrac{4\, x^{0+1}}{0+1} + k = 4x + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(4\, x + k) = 4$

(3) $\int 3\, x^2\, dx = \dfrac{3\, x^{2+1}}{2+1} + k = x^3 + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(x^3 + k) = 3\, x^2$

(4) $\int dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + k = x + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(x + k) = 1$

(5) $\int (x+1)^2\, dx = \dfrac{(x+1)^{2+1}}{2+1} + k = \dfrac{1}{3}(x+1)^3 + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{3}(x+1)^3 + k = (x+1)^2$

Kaidah 2. Formula logaritmis

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k}$$

Contoh :

(1) $\int \dfrac{3}{x}\, dx = 3 \ln x + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(3 \ln x + k) = \dfrac{3}{x}$

(2) $\int \dfrac{3}{x+1}\, dx = \int \dfrac{3\, d(x+1)}{x+1} + k = 3 \ln (x+1) + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}\left\{ 3 \ln (x+1) + k \right\} = \dfrac{3}{x+1}$

Kaidah 3. Formula eksponensial

$$\int e^x\,dx = e^x + k$$
$$\int e^u\,du = e^u + k \qquad u = f(x)$$

Contoh :

(1) $\int e^{x+2}\,dx = \int e^{x+2}\,d(x+2) = e^{x+2} + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(e^{x+2} + k) = e^{x+2}$

(2) $\int e^{2x}\,dx = \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{2}e^{2x} + k) = e^{2x}$

(3) $\int e^{-3x+2}\,dx = -\dfrac{1}{3}\int e^{-3x+2}\,d(-3x+2) = -\dfrac{1}{3}e^{-3x+2} + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(-\dfrac{1}{3}e^{-3x+2} + k) = e^{-3x+2}$

Kaidah 4. Formula penjumlahan

$$\int \{(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$= F(x) + G(x) + k$$

Contoh :

(1) $\int (x^4 + 3x^2)\,dx = \int x^4\,dx + \int 3x^2\,dx = 0{,}2x^5 + x^3 + k.$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(0{,}2x^5 + x^3 + k) = x^4 + 3x^2$

(2) $\int (e^x + \dfrac{1}{x})\,dx = \int e^x dx + \int \dfrac{1}{x}\,dx = e^x + \ln x + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(e^x + \ln x + k) = e^x + \dfrac{1}{x}$

(3) $\int (3x^2 - 10x)\,dx = \int 3x^2 dx - \int 10x\,dx = x^3 - 5x^2 + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 + k) = 3x^2 - 10x$

Kaidah 5. Formula perkalian

$$\boxed{\int nf(x)dx = n\int f(x)dx} \qquad n \neq 0$$

Contoh :

(1) $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\left(\dfrac{x^{2+1}}{2+1} + k_i\right) = x^3 + k$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}(x^3 + k) = 3x^2$

(2) $\int -x^3 dx = -1\int x^3\,dx = -1\left(\dfrac{x^{3+1}}{3+1} + k_i\right) = -\dfrac{1}{4}x^4 \pm k.$

Bukti : $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{4}x^4 \pm k\right) = -x^3$

Kaidah 6. Formula substitusi

$$\boxed{\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + k}$$

di mana $u = g(x)$, dan $\int du$ merupakan substitut bagi $\int dx$

Contoh :

(1) Selesaikanlah $\int 6x(3x^2 - 10)\,dx$

Dengan cara penyelesaian biasa atau langsung :

$\int 6x(3x^2 - 10)\,dx = \int (18x^3 - 60x)\,dx = 4{,}5x^4 - 30x^2 + k$

Dengan cara substitusi, misalkan $u = 3x^2 - 10$; maka $du/dx = 6x$, atau $dx = du/6x$. Sehingga :

$$\int 6x(3x^2 - 10)\,dx = \int 6xu\frac{du}{6x} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + k_i$$

$$= \frac{(3x^2 - 10)^2}{2} + k_i$$

$$= \frac{1}{2}(9x^4 - 60x^2 + 100) + k_i$$
$$= 4{,}5\,x^4 - 30\,x^2 + 50 + k_i$$
$$= 4{,}5\,x^4 - 30\,x^2 + k$$
di mana $k = 50 + k_i$

(2) Selesaikanlah $\int \frac{x+3}{x^2 + 6x}\, dx$

Misalkan $u = x^2 + 6x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6$

Karenanya pembilang $(x + 3) = ½\,(du/dx)$. Sehingga,

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x}\, dx = \int \frac{½\,(du/dx)}{u}\, dx$$
$$= \int \frac{½\, du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\ln u + k$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x) + k$$

Latihan Integrasi Taktentu

Selesaikanlah :

1. $\int x^3\, dx$
2. $\int x^{-4}\, dx$
3. $\int 9x^2\, dx$
4. $\int \frac{5}{x}\, dx$
5. $\int (x^2 - \sqrt{x} + 4)\, dx$
6. $\int \sqrt{2 + 5x}\, dx$
7. $\int \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

8. $\int x^2 e^x \, dx$

9. $\int \dfrac{x e^x}{(1 + x)^2} \, dx$

10. $\int (\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}) \, dx$

11. $\int \dfrac{(1 - 2x)^2}{\sqrt{2x}} \, dx$

12. $\int (x \sqrt{x} - 5)^2 \, dx$

13. $\int x \ln x \, dx$

14. $\int e^x (x + 1)^2 \, dx$

15. $\int x e^{-3x} \, dx$

16. $\int x e^{-x^2} \, dx$

17. $\int \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x} \, dx$

18. $\int \dfrac{(x + 1) \, dx}{(x + 1)^2 + (a + 1)^2} \, dx$

19. $\int (x^2 + 3x + 4)^3 (2x + 3) \, dx$

20. $\int (x^{1/3} + x^{2/3})^2 \, dx$

11.3 PENERAPAN EKONOMI

Pendekatan integral taktentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi total dari suatu variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinalnya diketahui. Karena fungsi marjinal pada dasarnya merupakan turunan dari fungsi total, maka dengan proses sebaliknya - yakni integrasi - dapatlah dicari fungsi asal dari fungsi turunan tersebut atau fungsi totalnya.

11.3.1 Fungsi Biaya

Biaya total $\quad C = f(Q)$

Biaya marjinal $\quad : MC = C' = \dfrac{dC}{dQ} = f'(Q)$

Biaya total tak lain adalah integral dari biaya marjinal

$$\boxed{C = \int MC\, dQ = \int f'(Q)\, dQ}$$

Kasus 64

Biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh $MC = 3Q^2 - 6Q + 4$. Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya.

Biaya total : $C = \int MC\, dQ$
$= \int (3Q^2 - 6Q + 4)\, dQ$
$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$

Biaya rata-rata : $AC = \dfrac{C}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + k/Q$

Konstanta k tak lain adalah biaya tetap. Jika diketahui biaya tetap tersebut sebesar 4, maka :

$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$
$AC = Q^2 - 3Q + 4 + 4/Q$

11.3.2 Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : $R = f(Q)$
Penerimaan marjinal : $MR = R' = \dfrac{dR}{dQ} = f'(Q)$

Penerimaan total tak lain adalah integral dari penerimaan marjinal

$$\boxed{R = \int MR\, dQ = \int f'(Q)\, dQ}$$

Kasus 65

Carilah persamaan penerimaan total dan penerimaan rata-rata dari suatu perusahaan jika penerimaan marjinalnya $MR = 16 - 4Q$.

Penerimaan total : $R = \int MR\, dQ$
$= \int (16 - 4Q)\, dQ$
$= 16Q - 2Q^2$

Penerimaan rata-rata : $AR = \dfrac{R}{Q} = 16 - 2Q$

Dalam persamaan penerimaan total konstanta $k = 0$, sebab penerimaan tidak akan ada jika tak ada barang yang dihasilkan atau terjual.

11.3.3 Fungsi Utilitas

Utilitas total : $U = f(Q)$
Utilitas marjinal : $MU = U' = \dfrac{dU}{dQ} = f'(Q)$

Utilitas total tak lain adalah integral dari utilitas marjinal

$$\boxed{U = \int MU\, dQ = \int f'(Q)\, dQ}$$

Kasus 66

Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marjinalnya $MU = 90 - 10Q$.

Utilitas total: $U = \int MU\, dQ$
$= \int (90 - 10Q)\, dQ$
$= 90Q - 5Q^2$

Seperti halnya produk total dan penerimaan total, di sinipun konstanta $k = 0$, sebab tidak akan ada kepuasan atau utilitas yang diperoleh seseorang jika tak ada barang yang dikonsumsi.

11.3.4 Fungsi Produksi

Produk total : $P = f(X)$ di mana,
P = keluaran; X = masukan

Produk marjinal : $MP = P' = \dfrac{dP}{dX} = f'(X)$

Produk total tak lain adalah integral dari produk marjinal

$$\boxed{P = \int MP\, dX = \int f'(X)\, dX}$$

Kasus 67

Produk marjinal sebuah perusahaan dicerminkan oleh $MP = 18X - 3X^2$. Carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya.

Produk total : $P = \int MP\, dX$
$= \int (18X - 3X^2)\, dX$
$= 9X^2 - X^3$

Produk rata-rata : $AP = \dfrac{P}{X} = 9X - X^2$

Dalam persamaan produk total juga konstanta $k = 0$, sebab tidak akan ada barang (P) yang dihasilkan jika tak ada bahan (X) yang diolah atau digunakan.

11.3.5 Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Dalam ekonomi makro, konsumsi (C) dan tabungan (S) dinyatakan fungsional terhadap pendapatan nasional (Y).

$$C = f(Y) = a + bY$$

$$MPC = C' = \frac{dC}{dY} = f'(Y) = b$$

Karena $Y = C + S$, maka

$$S = g(Y) = -a + (1 - b)\,Y$$

$$MPS = S' = \frac{dS}{dY} = g'(Y) = (1 - b)$$

Berdasarkan kaidah integrasi, konsumsi dan tabungan masing-masing adalah integral dari *marginal propensity to consume* dan *marginal propensity to save.*

$$\boxed{\begin{array}{ll} C = \int MPC\, dY = F(Y) + k & \quad k \equiv a \\ S = \int MPS\, dY = G(Y) + k & \quad k \equiv -a \end{array}}$$

Konstanta k pada fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masing-masing adalah *autonomous consumption* dan *autonomous saving.*

Kasus 68

Carilah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masyarakat sebuah negara jika diketahui *autonomous consumption*-nya sebesar 30 milyar dan $MPC = 0{,}8$.

$C = \int MPC\, dY = \int 0{,}8\, dY = 0{,}8\,Y + 30$ milyar.
$S = \int MPS\, dY = \int 0{,}2\, dY = 0{,}2\,Y - 30$ milyar,

atau $S = Y - C = Y - (0{,}8\,Y - 30 \text{ milyar}) = 0{,}2\,Y - 30$ milyar.

11.4 INTEGRAL TERTENTU

Integral tertentu adalah integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya (memiliki batas-batas) tertentu. Integral tertentu digunakan untuk menghitung luas area yang terletak di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu-horizontal — x, dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh $x = a$ dan $x = b$.

Dalam integral taktentu kita temukan bahwa :

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + k}$$

Jika kita ingin mengetahui hasil integrasi tersebut untuk suatu rentangan wilayah tertentu, katakanlah antara $x = a$ dan $x = b$ di mana $a < b$, maka x dapat disubstitusi dengan nilai-nilai a dan b sehingga ruas kanan persamaan di atas menjadi :

$$\boxed{\{F(b) + k\} - \{F(a) + k\} = F(b) - F(a)}$$

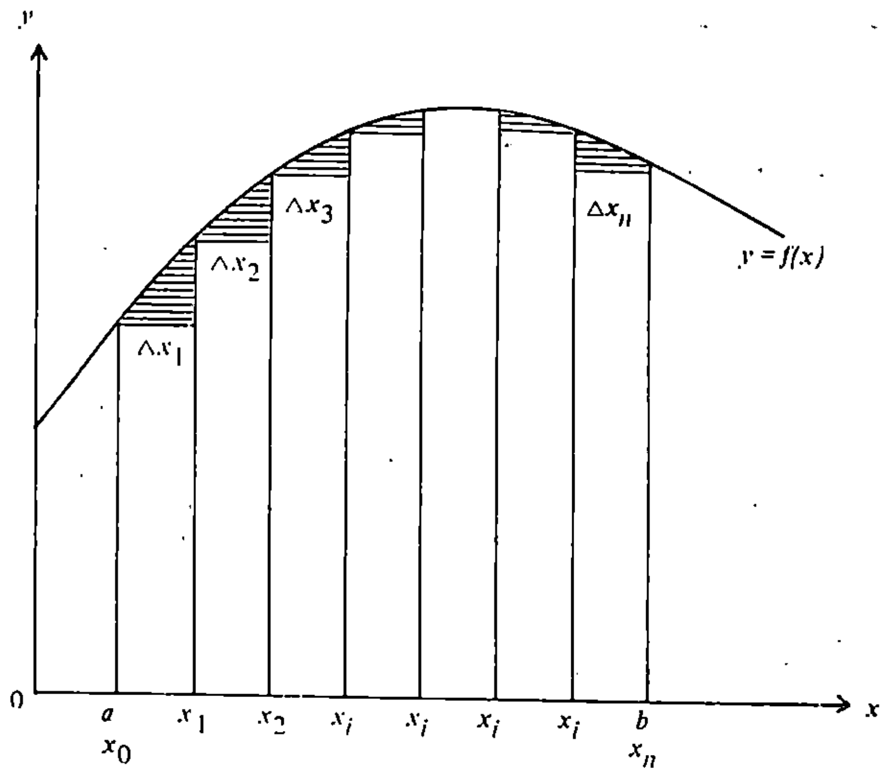
$F(b) - F(a)$ adalah hasil integral tertentu dari $f(x)$ antara a dan b. Secara lengkap persamaan pertama tadi dapat dituliskan menjadi :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Notasi $\int_a^b f(x)dx$ dibaca *integral* $f(x)$ untuk rentang wilayah x dari a ke b.

Selanjutnya — mengingat $a < b$ — a dinamakan *batas-bawah integrasi*, sedangkan b disebut *batas-atas integrasi*.

Pemahaman tentang integral tertentu ini akan lebih gamblang dengan bantuan penjelasan grafis. Andaikan kita memiliki $y = f(x)$, dan hendak dihitung luas area di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu horizontal x untuk rentangan dari $x = a$ ke $x = b$. Langkah pertama yang harus dilakukan ialah menetapkan a dan b pada sumbu horizontal x, sehingga diperoleh suatu rentangan atau interval wilayah antara a dan b. Kemudian rentangan ini dibagi-bagi menjadi sebanyak n sub-rentangan Δx_i yang sama lebar. Nilai masing-masing sub-rentangan tak lain adalah $\Delta x_i = (b - a)/n$; dan karena masing-masing sub-rentangan sama lebarnya, maka $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots\ldots = \Delta x_n$. Langkah berikutnya ialah menetapkan sebarang nama untuk titik-titik yang membatasi tiap-tiap sub-rentangan, katakanlah X_i. Perhatikan Gambar 11-1 di bawah ini.



Gambar 11—1

Nilai atau harga masing-masing titik yang membatasi tiap sub-rentangan adalah :

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2(\Delta x)$$
$$x_3 = a + 3(\Delta x)$$
....
$$x_n = a + n(\Delta x) = b$$

Luas seluruh area di bawah kurva untuk rentangan dari a ke b, dengan perkataan lain dari x_0 ke x_n adalah :

$$f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots\ldots + f(x_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

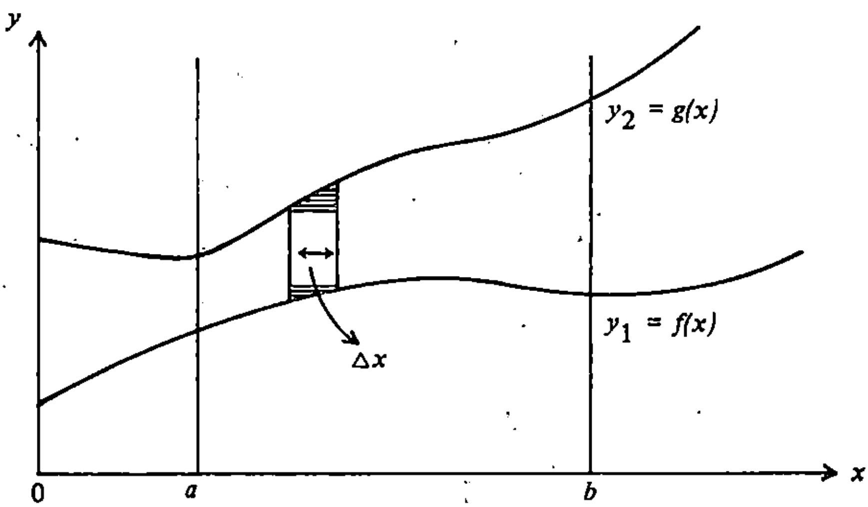
Dalam hal Δx sedemikian kecil-kecilnya atau mendekati nol, sementara n sedemikian banyaknya atau mendekati tak terhingga, maka berlaku

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Selain untuk menghitung luas suatu area antara sebuah kurva dan salah satu sumbu, integral tertentu dapat pula digunakan untuk menghitung luas suatu area yang terletak di antara dua kurva.

Andaikan kita memiliki dua buah kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, di mana $f(x) < g(x)$. Maka luas area antara kedua kurva ini untuk rentang wilayah dari a ke b ($a < b$) adalah :

$$\int_a^b \left\{ g(x) - f(x) \right\} dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$



Gambar 11—2

11.5 KAIDAH-KAIDAH INTEGRASI TERTENTU

Untuk $a < c < b$, berlaku :

1. $\int_a^b f(x)dx = [\ F(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$

Contoh : $\int_2^5 x^4\, dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{1}{5} [\ x^5\ ]_2^5 =$

$\frac{1}{5}(3125 - 32) = 618{,}6$

2. $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

Contoh : $\int_2^2 x^4\,dx = \left[\dfrac{x^5}{5}\right]_2^2 = \dfrac{1}{5}\left[x^5\right]_2^2 =$

$\dfrac{1}{5}(32 - 32) = 0$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Contoh : $\int_2^5 x^4\,dx = 618{,}6$

$-\int_5^2 x^4\,dx = -\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_5^2 =$

$-\dfrac{1}{5}\left[x^5\right]_5^2 = -\dfrac{1}{5}(32 - 3125) = 618{,}6$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Contoh : $\int_2^5 5\,x^4\,dx = \left[x^5\right]_2^5 = 3125 - 32 = 3093.$

$5\int_2^5 x^4\,dx = 5\,(618{,}6) = 3093.$

5. $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Contoh : $\int_2^5 (x^4 + 5\,x^4)\,dx = \int_2^5 x^4\,dx + \int_2^5 5\,x^4\,dx$

$= 618{,}6 + 3093 = 3.711{,}6$

6. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int^b f(x)\,dx$

Contoh : $\int_2^3 x^4\,dx + \int_3^5 x^4\,dx$

$= \left[\dfrac{x^5}{5}\right]_2^3 + \left[\dfrac{x^5}{5}\right]_3^5$

$= \dfrac{1}{5}(243 - 32) + \dfrac{1}{5}(3125 - 243) = 618{,}6$

Latihan Integrasi Tertentu

Selesaikanlah :

1. $\int_{4}^{6} x\, dx$

2. $\int_{4}^{6} x^{3}\, dx$

3. $\int_{4}^{6} 8\, x^{3}\, dx$

4. $\int_{4}^{6} (x + 9\, x^{3})\, dx$

5. $\int_{4}^{6} (3\, x^{2} - 2\, x)\, dx$

6. $\int_{0}^{3} (x^{2} - 2\, x + 3)\, dx$

7. $\int_{-1}^{1} (2\, x + 5)\, dx$

8. $\int_{-6}^{-4} (3\, x^{2} - 2\, x)\, dx$

9. $\int_{-6}^{-4} (3\, x^{2} + 2\, x)\, dx$

10. $\int_{-6}^{-4} (x + 9\, x^{3})\, dx$

11. $\int_{-3}^{0} (x^{2} - 2\, x + 3)\, dx$

12. $\int (2\, x + 1)(3 - x)\, dx$

13. $\int_{1}^{4} (\sqrt{x} - x)^{2}\, dx$

14. $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/3})\, dx$

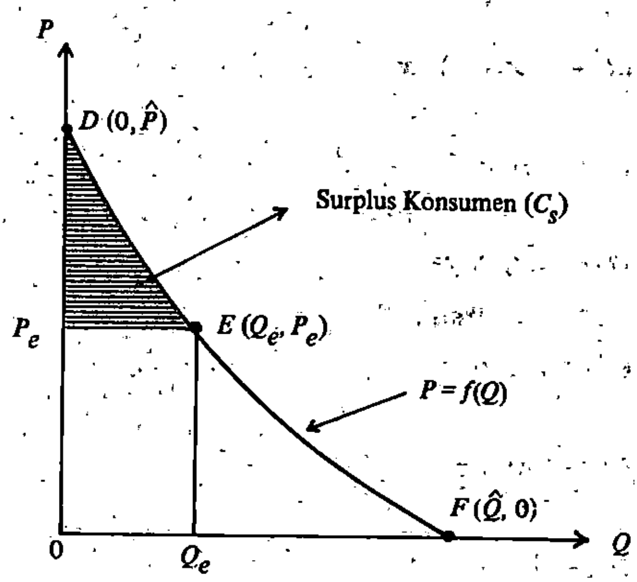
15. $\int_{a}^{2a} (a + x)\, dx$

11.6 PENERAPAN EKONOMI

11.6.1 Surplus Konsumen

Surplus konsumen (*Consumers' surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Fungsi permintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e hal ini akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga P_e. Keuntungan lebih semacam inilah yang oleh *Alfred Marshall* disebut surplus konsumen. Secara geometri, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.



Gambar 11—3

Surplus konsumen atau C_s (singkatan dari *Consumers' surplus*) tak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas-bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas-atas.

Besarnya surplus konsumen adalah :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e P_e$$

dalam hal fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$
atau

$$C_S = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP$$

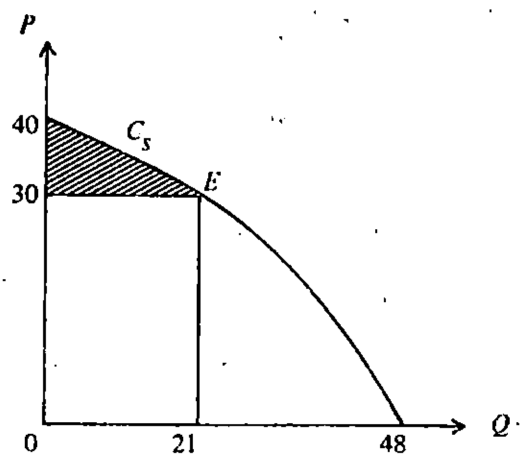
dalam hal fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga.

Dengan demikian

$$\boxed{C_S = \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ - Q_e P_e = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\, dP}$$

Kasus 69

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 48 - 0{,}03\, P^2$. Hitunglah surplus konsumen jika tingkat harga pasar adalah 30.



Gambar 11—4

$Q = 48 - 0{,}03\, P^2$
Jika $P = 0$, $\quad Q = 48$
Jika $Q = 0$, $\quad P = 40 \equiv \hat{P}$
Jika $P \equiv P_e = 30$, $\quad Q \equiv Q_e = 21$

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\, dP = \int_{30}^{40} (48 - 0{,}03\, P^2)\, dP$$

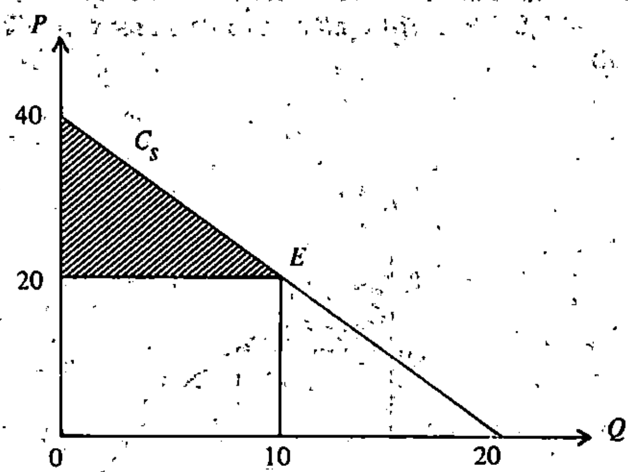
$$= [\, 48\, P - 0{,}01\, P^3\,]_{30}^{40}$$

$$= \{ 48\,(40) - 0{,}01\,(40)^3 \} - \{ 48\,(30) - 0{,}01\,(30)^3 \}$$
$$= (1920 - 640) - (1440 - 270) = 110.$$

Kasus 70

Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan $Q = 40 - 2\,P$ yang tingkat harga pasarnya 10.

$Q = 40 - 2\,P \rightarrow P = 20 - 0{,}50\, Q$
Jika $P = 0$, $Q = 40$
Jika $Q = 0$, $P = 20 \equiv \hat{P}$
Jika $P_e = 10$, $Q_e = 20$



Gambar 11—5

Cara Pertama :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ - Q_e P_e = \int_0^{20} (20 - 0{,}50\, Q)\, dQ - (20)(10)$$

$$= [\, 20\, Q - 0{,}25\, Q^2\,]_0^{20} - 200$$

$$= \{ 20\,(20) - 0{,}25\,(20)^2 \} - \{ 20\,(0) - 0{,}25\,(0)^2 \} - 200$$
$$= 400 - 100 - 200 = 100$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA

Cara Kedua :

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\, dP = \int_{10}^{20} (40 - 2P)\, dP$$

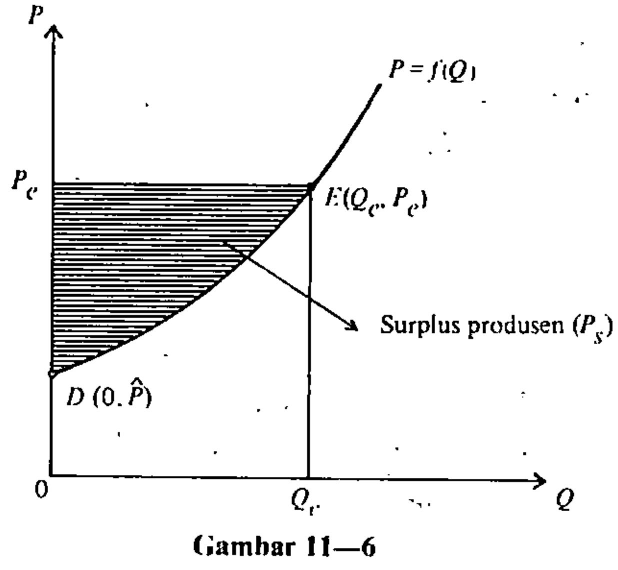
$$= [\,40P - P^2\,]_{10}^{20}$$

$$= \{40(20) - (20)^2\} - \{40(10) - (10)^2\} = 400 - 300 = 100$$

11.6.2 Surplus Produsen

Surplus produsen (*Producers' surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya.

Fungsi penawaran $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga yang lebih rendah dari P_e hal ini akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia kini dapat menjual barangnya dengan harga P_e (lebih tinggi dari harga jual semula yang direncanakan). Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus produsen. Secara geometri, besarnya surplus produsen ditunjukkan oleh luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.



Gambar 11—6

Surplus produsen atau P_s (singkatan dari *Producers' surplus*) tak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas-bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas-atas.

Besarnya surplus produsen adalah :

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ$$

dalam hal fungsi penawaran berbentuk $P = f(Q)$
atau

$$P_s = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP.$$

dalam hal fungsi penawaran berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$, atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga.

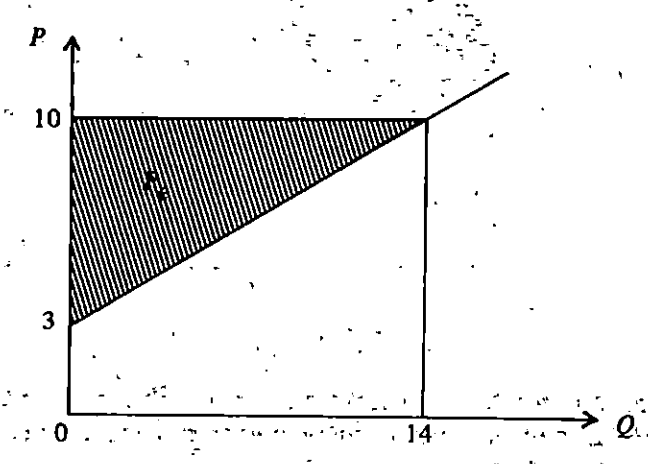
Dengan demikian :

$$\boxed{P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP}$$

Kasus 71

Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 0{,}50\, Q + 3$. Berapa surplus produsen itu bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10 ? Lakukan perhitungan dengan dua cara.

$P = 0{,}50\, Q + 3 \rightarrow Q = -6 + 2P$
$P = 0 \rightarrow Q = -6$
$Q = 0 \rightarrow P = 3 \equiv \hat{P}$
$P_e = 10 \rightarrow Q_e = 14$



Gambar 11—7

Cara Pertama :

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ = (14)(10) - \int_0^{14}$$

$$= 140 - [\, 0{,}25\, Q^2 + 3\, Q\,]_0^{14}$$

$$= 140 - \{\, 0{,}25\,(14)^2 + 3(14)\,\} - \{0{,}25(0)^2 + 3(0)\}$$
$$= 140 - 91 - 0 = 49.$$

Cara Kedua :

$$P_s = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP = \int_3^{10} (-6 + 2\,P)\, dP$$

$$= [\, -6\,P + P^2\,]_3^{10} = \{\, -6(10) + 10^2\} - \{-6(3) + 3^2\}$$

$$= 40 - (-9) = 49.$$

Kasus 72

Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q = -30 + 5\,P$ dan $Q = 60 - 4\,P$.

Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen.

Penawaran :

$$Q = -30 + 5\,P$$
$$P = 6 + 0{,}20\,Q$$

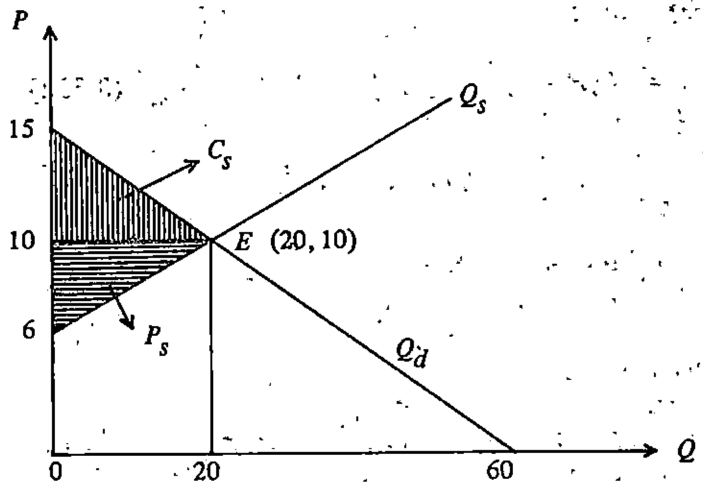
Permintaan :

$$Q = 60 - 4\,P$$
$$P = 15 - 0{,}25\,Q$$

Keseimbangan pasar :

$$Q_s = Qd$$
$$-30 + 5\,P = 60 - 4\,P$$

$$9\,P = 90$$
$$P = 10 \equiv P_e$$
$$Q = 60 - 4\,P = 60 - 4(10) = 20 \equiv Q_e$$



Gambar 11 — 8

Surplus konsumen :

$$C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ - Q_e P_e$$

$$= \int_0^{20} (15 - 0{,}25\, Q)\, dQ - (20)(10)$$

$$= [\, 15\, Q - 0{,}125\, Q^2 \,]_0^{20} - 200$$

$$= 250 - 200 = 50.$$

Surplus produsen :

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ$$

$$= (20)(10) - \int_0^{Q_e} (6 + 0{,}20\, Q)\, dQ$$

$$= 200 - [\, 6\, Q + 0{,}10\, Q^2 \,]_0^{20}$$

$$= 200 - 160 = 40.$$

BAGIAN EMPAT
ALJABAR LINEAR

BAB 12
MATRIKS

Matriks dan vektor merupakan hasil penemuan penting dalam matematika. Keduanya merupakan pengembangan lebih lanjut dari sistem persamaan linear. Oleh karenanya aljabar matriks dan aljabar vektor sering juga disebut dengan istilah aljabar linear. Matriks dapat digunakan untuk merumuskan berbagai masalah — termasuk masalah-masalah bisnis dan ekonomi — secara singkat dan jelas, untuk kemudian memecahkannya dengan cara yang singkat dan mudah.

Bab ini menguraikan hal ikhwal dasar yang berkenaan dengan matriks. Konsep-konsep matriks serta kaidah-kaidah pengoperasiannya dijelaskan secara bertahap, satu demi satu. Penerapan matriks dalam bisnis dan ekonomi dibahas secara tersendiri di dalam bab-bab berikutnya.

12.1 PENGERTIAN MATRIKS DAN VEKTOR

Matriks ialah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat di antara sepasang tanda kurung. Secara umum, suatu matriks dituliskan sebagai :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung biasa atau tanda kurung siku. Bilangan-bilangan yang terkandung di dalam suatu matriks dinamakan unsur. Jajaran horizontal unsur-unsur matriks dinamakan baris, sedangkan jajaran vertikal unsur-unsur matriks dinamakan kolom.

Unsur-unsur suatu matriks secara umum dilambangkan dengan notasi a_{ij}; i menunjukkan baris sedangkan j menunjukkan kolom. Demikian a_{ij} berarti unsur matriks **A** pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Setiap matriks terdiri atas satu atau sejumlah baris dan satu atau sejumlah kolom, tetapi jumlah baris dan jumlah kolom suatu matriks tidak harus sama. Matriks yang terdiri atas m baris dan n kolom dinamakan matriks berukuran $m \times n$ atau matriks berorde $m \times n$. Dengan demikian banyaknya baris dan kolom melambangkan ukuran atau orde atau dimensi dari matriks yang bersangkutan. Matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya ($m = n$) dinamakan matriks bujursangkar (*square matrix*).

Matriks tidak mempunyai nilai numerik. Artinya meskipun matriks merupakan suatu kumpulan bilangan, tetapi ia sendiri tidak melambangkan sesuatu bilangan. Hal ini berbeda dengan determinan, yang bersifat numerik. Selain dilambangkan dengan huruf besar bercetak tebal, matriks sering pula dituliskan dengan lambang unsur umumnya dikurung, misalnya :

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = [a_{ij}] \quad \text{atau} \quad \mathbf{A}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Contoh-contoh matriks :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh yang pertama adalah matriks berorde 2 × 3, sebab mempunyai 2 baris dan 3 kolom. Yang kedua merupakan matriks berorde 3 × 2, karena memiliki 3 baris dan 2 kolom. Adapun yang terakhir ialah matriks berorde 2 × 2 dan merupakan matriks bujursangkar. Jika matriks pertama dan kedua serta ketiga masing-masing diberi nama **A** dan **B** serta **C**, maka dapatlah dituliskan : $\mathbf{A}_{2 \times 3}$ dan $\mathbf{B}_{3 \times 2}$ serta $\mathbf{C}_{2 \times 2}$.

Vektor ialah bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom. Dalam hal ini dibedakan dua macam vektor yaitu vektor-baris dan vektor-kolom. Vektor baris tak lain adalah matriks sebaris atau matriks berbaris tunggal. Sedangkan vektor kolom adalah matriks sekolom atau matriks berkolom tunggal.

Suatu vektor biasanya dilambangkan dengan sebuah huruf kecil bercetak tebal atau huruf kecil biasa beranak-panah di atasnya.*) Kecuali itu bisa pula dilambangkan dengan huruf besar (seperti halnya lambang matriks), mengingat vektor pada dasarnya juga merupakan sebuah matriks, yakni matriks berorde $m \times 1$ (vektor kolom) atau berorde $1 \times n$ (vektor baris).

Contoh vektor baris :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Contoh vektor kolom :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Unsur suatu vektor dilambangkan dengan huruf kecil sesuai dengan nama vektornya dan diikuti oleh indeks kolom atau indeks barisnya. Dengan demikian $a_{\cdot j}$ berarti menunjukkan unsur dari vektor-baris **a** kolom ke-j, sedangkan $a_{i \cdot}$ berarti menunjukkan unsur dari vektor-kolom **a** baris ke-i. Dalam contoh-contoh di atas, $a_{\cdot 2}$ berarti unsur dari vektor-baris **a** kolom ke-2, yaitu bilangan 4; $c_{2 \cdot}$ berarti unsur dari vektor-kolom **c** baris ke-2, yaitu bilangan 6.

---

*) Dalam buku ini setiap huruf besar bercetak tebal berarti melambangkan sebuah matriks, sedangkan huruf kecil bercetak tebal melambangkan vektor.

Dimensi suatu vektor tercermin dari banyaknya unsur pada vektor yang bersangkutan. Suatu vektor baris yang mempunyai n unsur dinamakan vektor berdimensi -n. Dalam contoh di atas, **a** dan **b** adalah vektor-baris berdimensi -3. Suatu vektor kolom yang mempunyai m unsur dinamakan vektor berdimensi -m. Vektor-vektor **c** dan **d** dalam contoh di atas merupakan vektor-vektor berdimensi -3.

12.2 KESAMAAN MATRIKS DAN KESAMAAN VEKTOR

Dua buah matriks **A** dan **B** dikatakan sama — dan dituliskan $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ — apabila keduanya berorde sama dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama ($a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j). Jika matriks **A** tidak sama dengan matriks **B**, ditulis $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

maka $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ dan $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

Dua buah vektor dikatakan sama apabila keduanya sejenis, sedimensi dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

Contoh :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ dan $\mathbf{b} \neq \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Catatan :

Berdasarkan definisi matriks dan vektor sebagaimana diuraikan di muka, maka selain merupakan kumpulan bilangan, matriks dapat pula dipandang sebagai kumpulan vektor. $\mathbf{A}_{m \times n}$ adalah matriks **A** yang merupakan kumpulan dari m buah vektor-baris dan n buah vektor-kolom. Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ adalah matriks yang merupakan kumpulan dari

vektor-vektor : $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

12.3 PENGOPERASIAN MATRIKS DAN VEKTOR

Berikut ini diuraikan syarat-syarat, cara dan kaidah-kaidah penjumlahan, pengurangan serta perkalian matriks dan vektor. Sebelumnya satu hal perlu dicatat : matriks dan vektor tidak dapat dibagi. Oleh karenanya dalam matriks dan vektor tidak dikenal operasi pembagian.

12.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila keduanya berorde sama. Jumlah atau selisih dua matriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ adalah sebuah matriks baru $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ yang berorde sama, yang unsur-unsurnya merupakan jumlah atau selisih unsur-unsur **A** dan **B**.

$$\boxed{\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \qquad \text{dimana} \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena penjumlahan antarbilangan bersifat komutatif dan asosiatif, padahal matriks adalah kumpulan bilangan, maka untuk penjumlahan antarmatriks berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif.

Kaidah Komutatif	: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
Kaidah Asosiatif	: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$

12.3.2 Perkalian Matriks dengan Skalar

Hasilkali sebuah matriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dengan suatu skalar atau bilangan nyata λ adalah sebuah matriks baru $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ yang berorde sama dan unsur-unsurnya λ kali unsur-unsur matriks semula ($b_{ij} = \lambda a_{ij}$).

$$\boxed{\lambda \mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad \text{dimana } b_{ij} = \lambda a_{ij}}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 3$$

$$\text{maka } \lambda \mathbf{A} = 3\,\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 15 \\ 24 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Untuk perkalian matriks dengan skalar berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif.

Kaidah Komutatif	: $\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda$
Kaidah Distributif	: $\lambda(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} \pm \lambda \mathbf{B}$

12.3.3 Perkalian Antarmatriks

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya. Hasilkali dua buah matriks $\mathbf{A}_{m \times n}$ dengan $\mathbf{B}_{n \times p}$ adalah sebuah matriks baru $\mathbf{C}_{m \times p}$, yang unsur-unsurnya merupakan perkalian silang unsur-unsur baris matriks **A** dengan unsur-unsur kolom matriks **B**.

$$\boxed{\mathbf{A}_{m \times n} \times \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}}$$

Contoh :

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

maka $A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = 2.3 + (-3)6 + 5.2 = -2 \\
c_{12} &= a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = 2.5 + (-3)(-7) + 5.9 = 76 \\
c_{21} &= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 8.3 + 2.6 + 4.2 = 44 \\
c_{22} &= a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} = 8.5 + 2(-7) + 4.9 = 62
\end{aligned}$$

Jadi, $AB = C = \begin{bmatrix} -2 & 76 \\ 44 & 62 \end{bmatrix}$

Penyelesaian langsung dapat dilakukan sebagai berikut :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.3 + (-3)6 + 5.2 & 2.5 + (-3)(-7) + 5.9 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 & 8.5 + 2(-7) + 4.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 76 \\ 44 & 62 \end{bmatrix}$$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 + 2.6 & 1.7 + 2.8 \\ 3.5 + 4.6 & 3.7 + 4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{bmatrix}$

Untuk perkalian antarmatriks berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, tetapi tidak berlaku kaidah komutatif.

Kaidah Asosiatif	:	$A(BC) = (AB)C = ABC$
Kaidah Distributif	:	$A(B + C) = AB + AC$
		$(A + B)C = AC + BC$

12.3.4 Pengoperasian Vektor

Mengingat vektor pada hakekatnya juga merupakan suatu matriks, yakni matriks berbentuk khusus, maka syarat-syarat dan cara pengoperasian matriks berlaku pula untuk pengoperasian vektor. Begitu juga dengan kaidah-kaidah yang menyertainya. Dua buah vektor hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila keduanya sejenis dan sedimensi. Dua buah vektor hanya dapat dikalikan apabila keduanya berlainan jenis tetapi berdimensi sama.

12.3.5 Perkalian Matriks dengan Vektor

Sebuah matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor-kolom, dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor-kolom yang bersangkutan; hasilnya adalah berupa sebuah vektor-kolom baru.

$$\boxed{\mathbf{A}_{m \times n} \times \mathbf{b}_{n \times 1} = \mathbf{c}_{m \times 1}} \qquad n > 1$$

Contoh :

1) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3)6 + 5.2 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 44 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 + 2.8 \\ 3.7 + 4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \end{bmatrix}$

Latihan Pengoperasian Matriks

1. Carilah jumlah dan selisih **A** dan **B** jika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Carilah jumlah dan selisih **X** dan **Y** jika

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Jika **A** dan **B** serta **C** masing-masing adalah :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

(a) carilah **A** + **B** + **C**
(b) carilah **A** — **B** — **C**
(c) carilah **A** + **B** — **C**
(d) carilah (**A** + **B**) — (**A** + **C**)

4. Seandainya matriks-matriks **A** berorde 2 × 3, **B** berorde 4 × 3, **C** berorde 3 × 3 dan **D** berorde 3 × 2, tentukan bentuk atau orde dari hasil-hasil operasi perkalian berikut :

(a) **AC** (d) **BC**
(b) **DA** (e) **DAC**
(c) **AD** (f) **BCDA**

5. Untuk **X** dan **Y** dalam Soal no. 2 di atas, carilah sebuah matriks **Z** berorde 3 × 3 sedemikian rupa sehingga memenuhi :

(a) **X** — **Z** = 2 **Y** (b) **X** + **Z** = 3 **Y**

6. Tentukan hasilkali **XY** dalam Soal no. 2 tersebut.

7. Tentukan **KL** dan **LM** serta **KLM** untuk :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Tentukan (a) $\mathbf{A}^2$, (b) $(\mathbf{BC})^2$ dan (c) **AB** — 2 **CD** untuk :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Jika **I** adalah sebuah matriks satuan berorde 3 × 3, sedangkan :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

tentukan :

(a) **A** — **I** (c) (**A** — **I**)**B**
(b) **I** — **A** (d) (**I** — **A**)**B**

10. Andaikan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

tentukan :

(a) **AC** (c) **AC — B**

(b) **CA** (d) **B — AC**

12.4 BENTUK-BENTUK KHAS MATRIKS

Matriks memiliki berbagai bentuk khas berkenaan dengan unsur-unsur yang dikandungnya. Sebelum kita mengenal bentuk-bentuk khas tersebut, ada baiknya terlebih dahulu difahami pengertian tentang diagonal utama pada matriks. Diagonal utama ialah diagonal yang mengurutkan secara silang unsur baris pertama kolom pertama ke unsur baris terakhir kolom terakhir, yakni diagonal yang bergerak dari sudut kiri-atas menuju ke sudut kanan-bawah.

12.4.1 Matriks Satuan

Matriks satuan atau matriks identitas ialah matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya nol. Dinamakan matriks satuan karena sifat matriks ini mirip dengan bilangan 1. Penulisannya lazim dilambangkan dengan notasi $\mathbf{I}_n$, di mana indeks n mencerminkan ordenya. Demikian $\mathbf{I}_2$ berarti matriks satuan berorde 2×2, $\mathbf{I}_5$ berarti matriks satuan berorde 5×5, dan sebagainya.

Contoh :

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.4.2 Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal pada contoh terakhir di atas sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks identitas memang merupakan bentuk khusus atau bagian dari matriks diagonal. Jika dua matriks diagonal yang seorde dikalikan, hasilnya akan berupa matriks diagonal juga.

12.4.3 Matriks Nol

Matriks nol ialah matriks yang semua unsurnya nol. Matriks semacam ini lazim juga dilambangkan dengan angka 0.

Contoh :

$$0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap matriks jika dikalikan dengan matriks nol akan menghasilkan matriks nol.

12.4.4 Matriks Ubahan

Matriks ubahan (*transpose matrix*) ialah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, di mana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya menjadi unsur-unsur baris. Matriks ubahan biasanya dituliskan dengan menambahkan tanda aksen (′) pada notasi matriks aslinya. Ubahan dari matriks $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{ij}]$ adalah $\mathbf{A}'_{n\times m} = [a'_{ji}]$.

Contoh :

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya. Jadi, $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$, $(\mathbf{B}')' = \mathbf{B}$, $(\mathbf{C}')' = \mathbf{C}$.

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{B}')' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Pembahasan lebih lanjut tentang matriks ubahan dan pengubahan matriks dapat ditemui di dalam Sub-bab 12.5 berikut.

12.4.5 Matriks Simetrik

Matriks simetrik ialah matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks **A** dikatakan simetrik apabila $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$.

Contoh :

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

A merupakan matriks simetrik, sebab $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$.

2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -5 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -5 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

B merupakan matriks simetrik, sebab $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$.

Jika sebuah matriks simetrik dikalikan dengan ubahannya, hasilnya akan berupa kuadrat dari matriks tersebut. Jadi, bila **A** simetrik maka $\mathbf{AA}' = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$. Matriks satuan juga merupakan matriks simetrik.

12.4.6 Matriks Simetrik Miring

Matriks simetrik miring ialah matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya. Matriks **A** dikatakan simetrik miring (*skew symmetric*) apabila $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$ atau $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$.

Contoh :

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad -\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

A merupakan matriks simetrik miring, sebab $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$.

$$2)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -9 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & -4 \\ 9 & -5 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \\ -9 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}$$

B merupakan matriks simetrik miring, sebab $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$.

Ciri khas matriks simetrik miring ialah diagonal utamanya terdiri atas bilangan-bilangan nol.

12.4.7 Matriks Balikan

Matriks balikan (*inverse matrix*) ialah matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan. Jika **A** merupakan sebuah matriks bujursangkar, maka balikannya dituliskan dengan notasi $\mathbf{A}^{-1}$, dan $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Contoh :

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & 2/9 \\ 4/27 & 1/27 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ adalah balikan dari **A**, sebab $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

$$2)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{B}^{-1}$ adalah balikan dari **B**.

Tidak setiap matriks bujursangkar mempunyai balikan. Pembahasan lebih lanjut tentang matriks balikan dan pembalikan matriks dapat ditemui di dalam Sub-bab 12.9.

12.4.8 Matriks Skalar, Ortogonal, Singular dan Nonsingular

Matriks skalar ialah matriks diagonal yang unsur-unsurnya sama atau seragam (λ). Dalam hal $\lambda = 1$, matriks skalar yang bersangkutan sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks skalar juga merupakan hasilkali sebuah skalar dengan matriks satuan, $\lambda\mathbf{I}$ = matriks skalar λ.

Matriks ortogonal ialah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks ubahannya menghasilkan matriks satuan, $\mathbf{AA'} = \mathbf{I}$.

Matriks singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya sama dengan nol, matriks semacam ini tidak mempunyai balikan. Sedangkan matriks non-singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya tidak nol, matriks semacam ini mempunyai balikan.

12.5 PENGUBAHAN MATRIKS

Mengubah sebuah matriks berarti mengubah matriks tersebut menjadi sebuah matriks baru dengan cara saling menukarkan posisi unsur-unsur baris dan unsur-unsur kolomnya. Hasil pengubahan suatu matriks dinamakan matriks ubahan, dilambangkan dengan menambahkan tanda aksen pada notasi matriks aslinya. Demikian ubahan dari matriks $\mathbf{A}$ adalah matriks ubahan $\mathbf{A'}$. Karena dalam pengubahan terjadi pertukaran baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, maka ubahan dari $\mathbf{A}_{m \times n}$ adalah $\mathbf{A'}_{n \times m}$ dan konsekuensinya $a_{ij} = a'_{ji}$

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ubahannya : } A'_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya. Ubahan dari suatu matriks bujur sangkar adalah matriks ubahan bujur sangkar juga. Dalam hal suatu matriks bujur sangkar sama dengan ubahannya, ia dinamakan matriks simetrik. Ubahan dari suatu matriks diagonal adalah matriks diagonal itu sendiri. Ubahan dari suatu vektor-baris adalah sebuah vektor-kolom, sebalikya ubahan dari suatu vektor-kolom adalah sebuah vektor baris.

Contoh :

1) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

2) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}'_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}'_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

4) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}'_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

5) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}'_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

6) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}'_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

7) $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}'_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

12.5.1 Ubahan Penjumlahan dan Pengurangan

Ubahan dari jumlah atau selisih beberapa matriks adalah jumlah atau selisih matriks-matriks ubahannya.

$$\boxed{(\mathbf{A}_{m\times n} \pm \mathbf{B}_{m\times n} \pm \mathbf{C}_{m\times n})' = \mathbf{A}'_{n\times m} \pm \mathbf{B}'_{n\times m} \pm \mathbf{C}'_{n\times m}}$$

Contoh :

Andaikan :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

maka :

$$(A + B + C)' = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 11 \\ 16 & 10 & 24 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 18 & 10 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

atau

$$A' + B' + C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 18 & 10 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

sedangkan :

$$(A + B - C)' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 6 & 10 & 10 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

atau

$$A' + B' - C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Untuk ubahan penjumlahan, sebagaimana halnya pada operasi penjumlahan matriks, berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif, yaitu bahwa :

$(A + B)' = (B + A)'$	atau $A' + B' = B' + A'$	komutatif
$\{A + (B + C)\}' = \{(A + B) + C\}' = A' + B' + C'$		asosiatif

12.5.2 Ubahan Perkalian

Ubahan dari perkalian matriks dengan skalar adalah perkalian skalar dengan matriks ubahannya. Ubahan dari perkalian antarmatriks adalah perkalian matriks-matriks ubahannya dengan urutan yang terbalik.

$$\boxed{(\lambda A)' = \lambda A'}$$

$$\boxed{(\mathbf{A}_{m\times n}\times \mathbf{B}_{n\times p}\times \mathbf{C}_{p\times q})' = \mathbf{C}'_{q\times p}\times \mathbf{B}'_{p\times n}\times \mathbf{A}'_{n\times m}}$$

Contoh :

1) $$\left\{3\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\}' = 3\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}' = 3\begin{bmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 15\\ 12 & 9\\ 18 & 3\end{bmatrix}.$$

2) Andaikan :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}.$$

maka :

$$\mathbf{ABC} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}566\\ 294\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{ABC})' = \begin{bmatrix}566 & 294\end{bmatrix}$$

atau alternatifnya :

$$(\mathbf{ABC})' = \mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}' = \begin{bmatrix}7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}566 & 294\end{bmatrix}$$

Untuk ubahan perkalian matriks dengan skalar, sebagaimana halnya pada operasi perkalian matriks dengan skalar, berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa :

$(\lambda\mathbf{A})' = (\mathbf{A}\,\lambda)'$ atau $\lambda\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\lambda$	komutatif
$\{\lambda(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})\}' = (\lambda\mathbf{A} \pm \lambda\mathbf{B})' = \lambda\mathbf{A}' \pm \lambda\mathbf{B}'$	distributif

Sedangkan untuk ubahan perkalian antarmatriks, seperti halnya pada operasi perkalian antarmatriks, berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa :

$$\{A(BC)\}' = \{(AB)C\}' = (ABC)' = C'B'A' \qquad \text{asosiatif}$$

$$\left.\begin{aligned} \{A(B \pm C)\}' &= (AB \pm AC)' = B'A' \pm C'A' \\ \{(A \pm B)C\}' &= (AC \pm BC)' = C'A' \pm C'B' \end{aligned}\right\} \text{distributif}$$

Latihan Pengubahan Matriks

1. Tentukan ubahan dari vektor-vektor berikut :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

2 . Ubahlah :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

3 . Andaikan :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 5 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan : $(\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R})'$, $(\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{R})'$, $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})' - \mathbf{R}'$ dan $(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{R})'$.

4. Untuk **P**, **Q** dan **R** seperti dalam soal di atas, tentukan : $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})'\mathbf{R}'$, $(\mathbf{P} - \mathbf{Q})'\mathbf{R}'$, $\mathbf{P}'(\mathbf{Q} + \mathbf{R})'$ dan $(\mathbf{R} - \mathbf{P})'\mathbf{Q}'$.

5 . Untuk **A** dan **B** seperti dalam Soal no. 2 serta **P**, **Q** dan **R** seperti dalam Soal no. 3 di atas, tentukan :

(a) $\mathbf{AB(P + Q + R)}$ (c) $\mathbf{(A + P + Q)BRA'}$
(b) $\mathbf{(P + Q + R)' AB}$ (d) $\mathbf{(B' + Q)A' - PR'}$

12.6 MATRIKS BERSEKAT

Sebuah matriks dapat disekat-sekat menjadi beberapa matriks-bagian atau sekatan. Sekatan-sekatannya dapat berupa matriks-matriks yang lebih kecil atau bahkan berupa skalar-skalar, tergantung pada jumlah sekatnya. Penyekatan sebuah matriks ditunjukkan oleh garis-garis horizontal dan vertikal di antara baris-baris dan kolom-kolomnya. Demikian penyekat dapat dilakukan secara horizontal, atau secara vertikal, atau bahkan kedua-duanya.

Contoh :

$$1)\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right] \qquad \mathbf{A'} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A'}_1 & \mathbf{A'}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$$2)\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B'} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B'}_1 \\ \hline \mathbf{B'}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ \hline 7 & 2 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$3)\ \mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ \hline -5 & 4 \end{array}\right] \qquad \mathbf{C'} = \left[\begin{array}{c|c} C'_{11} & C'_{21} \\ \hline C'_{12} & C'_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 7 & -5 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$$

Dalam contoh di atas, $\mathbf{A}_{4 \times 4}$ disekat dengan satu sekatan horizontal menjadi $\mathbf{A}_{1;\,2 \times 4}$ dan $\mathbf{A}_{2;\,2 \times 4}$. Secara umum dapat dikatakan bahwa jika sebuah matriks berorde $m \times n$ disekat dengan satu sekatan horizontal, maka akan diperoleh dua buah matriks-bagian berorde $m_1 \times n$ dan $m_2 \times n$ di mana $m_1 + m_2 = m$. Sedangkan jika matriks berode $m \times n$ disekat dengan satu sekatan vertikal, maka akan diperoleh sekatan-sekatan berorde $m \times n_1$ dan $m \times n_2$ di mana $n_1 + n_2 = n$. Dalam contoh di atas, satu sekatan vertikal atas $\mathbf{B}_{3 \times 4}$ menghasilkan $\mathbf{B}_{1;\,3 \times 2}$ dan $\mathbf{B}_{2;\,3 \times 2}$. Contoh 3) memperlihatkan penyekatan secara horizontal dan vertikal yang menghasilkan sekatan-sekatan berupa skalar. Contoh-contoh di atas memperlihatkan pula bahwa ubahan (*transpose*) dari suatu matriks bersekat adalah ubahan sekatan-sekatannya.

Pada dasarnya sebuah matriks dapat disekat menjadi lebih dari dua matriks-bagian atau sekatan. Jumlah sekatan maksimum yang dapat dibuat dari suatu matriks berorde $m \times n$ adalah mn sekatan. Menyekat matriks menjadi mn sekatan sama artinya dengan tidak melakukan penyekatan; perhatikan Contoh 3) di atas tadi. Penyekatan yang paling umum atau sering dilakukan adalah sekali secara horizontal dan sekali secara vertikal. Jadi, matriks **A** berorde $m \times n$ dapat disekat menjadi :

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

$\mathbf{A}_{11}$ berorde $m_1 \times n_1$ $\quad$ $\mathbf{A}_{12}$ berorde $m_1 \times n_2$

$\mathbf{A}_{21}$ berorde $m_2 \times n_1$ $\quad$ $\mathbf{A}_{22}$ berorde $m_2 \times n_2$

Sedangkan matriks ubahannya dapat dibentuk melalui pengubahan matriks-matriks sekatannya.

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} \\ \hline \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} \end{array}\right]$$

(Perhatikan perpindahan sekat antara $\mathbf{A}_{12}$ dan $\mathbf{A}_{21}$!)

Kegunaan menyekat matriks ialah untuk memudahkan pengoperasian, khususnya pengoperasian matriks-matriks berorde tinggi. Jika dua matriks seorde disekat secara sebangun, maka operasi penjumlahan atau pengurangannya dapat dilakukan melalui penjumlahan atau pengurangan sekatan-sekatannya. Jadi,

jika $\quad \mathbf{A}_{m \times n} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{array}\right]$ dan $\mathbf{B}_{m \times n} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right]$

($\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{B}_1$ berorde $m \times n_1$ serta $\mathbf{A}_2$ dan $\mathbf{B}_2$ berorde $m \times n_2$),

maka $\quad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \pm \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 \pm \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 \pm \mathbf{B}_2 \end{array}\right]$

Kaidah serupa berlaku pula jika **A** dan **B** sama-sama disekat secara horizontal dan sebangun. Dengan perkataan lain,

jika $\quad \mathbf{A}_{m \times n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 \end{array}\right]$ $\quad$ dan $\quad \mathbf{B}_{m \times n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right]$

($\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{B}_1$ berorde $m_1 \times n$ serta $\mathbf{A}_2$ dan $\mathbf{B}_2$ berorde $m_2 \times n$),

maka $\quad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \pm \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \pm \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 \pm \mathbf{B}_2 \end{array}\right]$

Contoh :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 3 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & -5 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & -6 & 8 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$$A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 5 & -5 & 6 & 16 \\ 8 & -1 & 1 & 17 & 5 \\ 5 & 14 & 6 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Dalam contoh ini **A** dan **B** disekat sehingga sama-sama memiliki sekatan berorde 3 × 3 (A_1 dan B_1) serta sekatan berorde 3 × 2 (A_2 dan B_2). Masih terdapat banyak kemungkinan bentuk penyekatan sebangun yang dapat dilakukan terhadap kedua matriks di atas.

Penyekatan matriks sangat bermanfaat pula untuk memudahkan operasi perkalian antarmatriks. Untuk keperluan ini, matriks-matriks yang hendak dikalikan haruslah disekat sedemikian rupa sehingga memenuhi syarat operasi perkalian. Jumlah kolom dari sekatan-sekatan yang dikalikan harus sama dengan jumlah baris dari sekatan-sekatan pengalinya.

Jika $A_{m \times n} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array}\right]$ di mana A_1 berorde $m \times n_1$, A_2 berorde $m \times n_2$

dan $B_{n \times p} = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$ di mana B_1 berorde $n_1 \times p$, B_2 berorde $n_2 \times p$

maka $AB = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[A_1B_1 + A_2B_2\right]_{m \times p}$

di mana $A_1 B_1$ dan $A_2 B_2$ berorde $m \times p$.

Contoh :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ \hline 7 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$A_1B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+24 & 25+6 & 15+36 \\ 8+12 & 20+3 & 12+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 31 & 51 \\ 20 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49+24 & 0+72 & 56+16 \\ 14+3 & 0+9 & 16+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 72 & 72 \\ 17 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107 & 103 & 123 \\ 37 & 32 & 48 \end{bmatrix}$$

Dalam hal **A** dan **B** masing-masing disekat sekali secara horizontal dan vertikal, operasi perkaliannya juga dapat dilakukan melalui perkalian sekatan-sekatannya, asalkan jumlah kolom dari sekatan-sekatan yang dikalikan (sekatan-sekatan **A**) sama dengan jumlah baris dari sekatan-sekatan pengalinya (sekatan-sekatan **B**).

Jika $\mathbf{A}_{m \times n} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$ dan $\mathbf{B}_{n \times p} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$

di mana $\mathbf{A}_{11}$ berorde $m_1 \times n_1$, $\mathbf{A}_{12}$ berorde $m_1 \times n_2$, $\mathbf{A}_{21}$ berorde $m_2 \times n_1$ dan $\mathbf{A}_{22}$ berorde $m_2 \times n_2$, sedangkan $\mathbf{B}_{11}$ berorde $n_1 \times p_1$, $\mathbf{B}_{12}$ berorde $n_1 \times p_2$, $\mathbf{B}_{21}$ berorde $n_2 \times p_1$ dan $\mathbf{B}_{22}$ berorde $n_2 \times p_2$,

maka
$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ \hline 7 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & 31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 73 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107 & 103 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 123 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi,} \quad \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ \hline 7 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 107 & 103 & 123 \\ \hline 37 & 32 & 48 \end{array}\right]$$

12.7 DETERMINAN MATRIKS

Determinan dari sebuah matriks ialah penulisan unsur-unsur sebuah matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu di antara sepasang garis tegak atau | |. Determinan dari matriks **A** lazim dituliskan dengan notasi |**A**| atau D_A. Determinan berbeda dari matriks dalam tiga hal. Pertama bahwa determinan unsur-sunsurnya diapit dengan sepasang garis tegak, sedangkan matriks unsur-unsurnya diapit dengan tanda kurung. Kedua, determinan senantiasa berbentuk bujur sangkar (jumlah baris = jumlah kolom, $m = n$), sedangkan matriks tidak harus demikian. Ketiga, determinan mempunyai nilai numerik tetapi tidak demikian halnya dengan matriks.

Pencarian nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal.

$$\text{Matriks } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{determinannya: } |\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nilai numeriknya : $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Contoh :

	matriks	*determinan*
1)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 4.3 = -2$
2)	$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 4(-3) = 22$

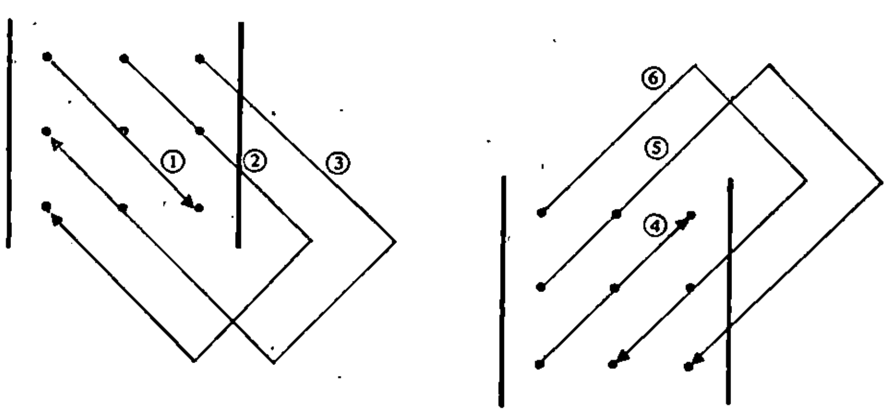
Untuk determinan berdimensi tiga :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

penyelesaiannya :

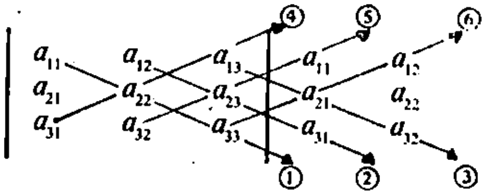
$$|A| = \underset{①}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{②}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{③}{a_{13}a_{32}a_{21}} - \underset{④}{a_{31}a_{22}a_{13}} - \underset{⑤}{a_{21}a_{12}a_{33}} - \underset{⑥}{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

yang secara skematik adalah sebagai berikut :



$|A| = (① + ② + ③) - (④ + ⑤ + ⑥)$

Atau dengan metoda yang dikenalkan oleh *Sarrus* :

$|\mathbf{A}|$ = 

$$= (① + ② + ③) - (④ + ⑤ + ⑥)$$

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - 7.5.3 - 4.2.9 - 1.6.8$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

12.7.1 Minor dan Kofaktor

Prinsip penyelesaian determinan dengan cara seperti dikemukakan di atas hanya berlaku sampai dengan determinan berdimensi tiga, tidak terap untuk penyelesaian determinan yang berdimensi lebih tinggi. Berkenaan dengan hal ini, *Laplace* berhasil mengembangkan suatu cara penyelesaian yang berlaku umum untuk determinan berdimensi berapapun, yakni dengan menggunakan minor dan kofaktor dari determinan yang bersangkutan.

Perhatikan kembali penyelesaian determinan berdimensi tiga,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dengan mengatur letak suku-sukunya, penulisan ini bisa diubah menjadi:

$$|\mathbf{A}| = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33}) + (a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

Ternyata, dengan "menutup" baris-baris dan kolom-kolom tertentu, determinan | **A** | terdiri atas beberapa determinan-bagian (*sub-determinant*). Determinan-determinan-bagian ini dinamakan minor. Suatu minor secara umum dilambangkan dengan notasi M_{ij}.

M_{11} adalah minor dari unsur a_{11}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan | **A** |.
M_{12} adalah minor dari unsur a_{12}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan | **A** |.
M_{13} adalah minor dari unsur a_{13}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-3 dari determinan | **A** |.

Penulisan determinan dalam bentuk minor seperti di atas dapat diubah ke dalam penulisan dalam bentuk kofaktor. Kofaktor dari determinan | **A** | untuk minor tertentu M_{ij} dilambangkan dengan nitasi A_{ij}.
Hubungan antara kofaktor dan minor :

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$$

M_{ij} adalah minor dari unsur a_{ij} yang diperoleh dengan jalan menutup baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari determinan | **A** |.
A_{ij} adalah kofaktor dari unsur a_{ij}.

Dengan demikian,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = +M_{11}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{23} = -M_{12}$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 M_{13} = +M_{13}$$

Kofaktor A_{ij} praktis adalah sama dengan minor M_{ij} itu sendiri jika $i + j$ menghasilkan bilangan genap, dan A_{ij} adalah negatif dari M_{ij} apabila $i + j$ menghasilkan bilangan ganjil.

Penyelesaian determinan dalam notasi minor :

$$| \mathbf{A} | = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

dalam notasi kofaktor menjadi :

$$| A | = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

atau :

$$| A | = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{untuk setiap b aris; } i = 1,2, \ldots, n$$

$$| A | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{untuk setiap kolom; } j = 1,2 \ldots, n$$

Cara penyelesaian determinan yang dikembangkan oleh Laplace ini, dikenal dengan sebutan metoda ekspansi dengan kofaktor, berlaku atau terap untuk determinan berdimensi berapapun.

Contoh :

Minor

$$| A | = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Kofaktor

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{11} = (-1)^2(-3) = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad \rightarrow \quad A_{12} = (-1)^3(-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{13} = (-1)^4(-3) = -3$$

$$| A | = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1(-3) + 2(6) + 3(-3) = 0$$

12.7.2 Sifat-sifat Determinan

Determinan mempunyai beberapa sifat khas berkenaan dengan nilai numeriknya. Tidak semua sifat dibuktikan di sini, pembaca dianjurkan mencobanya dengan contoh-contoh sendiri. Sifat-sifat tersebut adalah sebagai berikut :

1. Nilai determinan adalah nol jika semua unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 + 8 - 8 - 8 - 8 = 0$$

2. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 80 + 48 + 30 - 80 - 30 - 48 = 0$$

3. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sebanding.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 96 + 60 - 160 - 60 - 96 = 0$$

4. Nilai determinan adalah nol jika unsur-unsur pada salah satu baris atau kolom semuanya nol.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

5. Nilai determinan tidak berubah jika semua baris dan kolomnya saling bertukar letak, dengan kata lain determinan dari matriks **A** sama dengan determinan dari matriks ubahannya **A**'; $|A| = |A'|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 40 + 168 - 105 - 54 - 64 = 39$$

6. Nilai determinan berubah tanda (tetapi harga mutlaknya tetap) jika dua baris atau dua kolomnya bertukar letak.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 105 + 64 - 168 - 54 - 40 = -39$$

(Perhatikan bahwa $|\mathbf{B}|$ adalah $|\mathbf{A}|$ setelah baris pertama dan baris kedua bertukar letak).

7. Determinan dari suatu matriks diagonal adalah hasilkali unsur-unsur diagonalnya.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2.3.9 = 54$$

8. Jika setiap unsur pada salah satu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan, nilai determinannya adalah sama dengan hasilkalinya dengan bilangan tersebut.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 39.$$ Jika baris kedua dikalikan 2, maka :

$$|\mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 108 + 336 + 80 - 210 - 108 - 128$$
$$= 78 = 2|\mathbf{A}|$$

9. Jika semua unsur merupakan penjumlahan dari dua bilangan atau lebih, determinannya dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua determinan atau lebih.

10. Jika nilai determinan dari suatu matriks sama dengan nol, matriksnya dikatakan singular dan tidak mempunyai balikan (*inverse*); jadi bila $|\mathbf{A}| = 0$, $\mathbf{A}$ merupakan matriks singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ tidak ada.

11. Jika nilai determinan dari suatu matriks tidak sama dengan nol, matriksnya dikatakan nonsingular dan mempunyai balikan; jadi bila $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}$ merupakan matriks nonsingular dan $\mathbf{A}^{-1}$ ada.

12. Pada penguraian determinan (ekspansi Laplace), nilai determinan sama dengan nol jika unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom yang lain, tetapi tidak sama dengan nol jika unsur suatu baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom itu sendiri.

12.8 ADJOIN MATRIKS

Konsep-konsep determinan, minor, kofaktor dan adjoin sangat berkaitan erat. Kesemuanya amat bermanfaat dalam pekerjaan membalik matriks (menemukan matriks balikan) yang akan dibahas di dalam sub-bab sesudah ini. Adjoin dari suatu matriks ialah ubahan dari matriks kofaktor-kofaktornya.

$$\boxed{\text{adj. } \mathbf{A} = [A_{ij}]'}$$

Jadi, adjoin dari suatu matriks tak lain adalah berupa sebuah matriks juga. Untuk dapat membentuk sebuah adjoin, terlebih dahulu harus diketahui kofaktor-kofaktornya. Untuk mengetahui kofaktor-kofaktor, terlebih dahulu harus diketahui minor-minornya. Sebelumnya, untuk dapat mengetahui minor, terlebih dahulu harus dipahami prinsip-prinsip penyelesaian dan sifat-sifat determinan.

Contoh :

Andaikan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Karena $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, maka :

$$A_{11} = (-1)^2(-3) = -3 \quad A_{12} = (-1)^3(-6) = 6 \quad A_{13} = (-1)^4(-3) = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3(-6) = 6 \quad A_{22} = (-1)^4(-12) = -12 \quad A_{23} = (-1)^5(-6) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4(-3) = -3 \quad A_{32} = (-1)^5(-6) = 6 \quad A_{33} = (-1)^6(-3) = -3$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}\,\mathbf{A} = \left[A_{ij}\right]' = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dalam contoh ini secara kebetulan matriks kofaktor $[A_{ij}]$ sama dengan ubahannya, $[A_{ij}] = [A_{ij}]'$, berarti matriks kofaktor tersebut merupakan matriks simetrik.

Latihan Determinan dan Adjoin Matriks

1. Hitunglah nilai determinan dari matriks-matriks berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -9 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan semua minor yang terdapat pada masing-masing matriks di atas.
3. Bentuklah matriks kofaktor untuk masing-masing matriks tadi.
4. Bentuklah adjoin dari matriks-matriks tersebut.
5. Bentuklah adjoin **X**, adjoin **Y** dan adjoin **Z** jika :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

12.9 PEMBALIKAN MATRIKS

Membalik sebuah matriks berarti mencari suatu matriks balikan yang apabila dikalikan dengan matriks aslinya menghasilkan matriks satuan.

Balikan dari matriks **A** adalah matriks balikan $\mathbf{A}^{-1}$ (atau **B**) yakni jika dan hanya jika $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ (atau $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$).

Matriks balikan hanya terdapat pada matriks-matriks yang berbentuk bujur sangkar. Akan tetapi, sebagaimana telah disinggung di dalam Seksi 12.4.7, tidak setiap matriks bujur sangkar mempunyai balikan. Hanya matriks-matriks bujur sangkar yang nonsingular (determinannya $\neq 0$) yang memiliki balikan.

12.9.1 Pembalikan Matriks Berorde 2 × 2

Andaikata **B** adalah balikan dari **A**, maka untuk dapat membentuk **B** haruslah diperoleh lebih dahulu unsur-unsurnya atau b_{ij}. Nilai-nilai b_{ij} dapat dihitung berdasarkan penemuan seperti diuraikan berikut.

Andaikan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

dan balikannya dilambangkan dengan $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

maka menurut definisi **AB** = **I**, yakni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \qquad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \qquad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1$$

Dengan menyelesaikan keempat persamaan ini secara serempak untuk masing-masing b_{ij}, diperoleh :

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Perhatikan bahwa faktor pembaginya tak lain adalah determinan $|\mathbf{A}|$.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Dengan cara lain b_{ij} dapat pula dituliskan menjadi :

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|\mathbf{A}|} \qquad b_{12} = \frac{-a_{12}}{|\mathbf{A}|} \qquad b_{21} = \frac{-a_{21}}{|\mathbf{A}|} \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{|\mathbf{A}|}$$

Ini berarti jika pembaginya nol atau $|\mathbf{A}| = 0$, maka b_{ij} tak terdefinisi dan konsekuensinya matriks balikan **B** atau $\mathbf{A}^{-1}$ tidak dapat dibentuk. Itulah sebabnya matriks **A** tidak mempunyai balikan jika $|\mathbf{A}| = 0$.

Contoh :

1) Tentukan, kalau ada, balikan dari matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \text{ berarti } \mathbf{A} \text{ nonsingular dan } \mathbf{A}^{-1} \text{ ada.}$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|\mathbf{A}|} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{|\mathbf{A}|} = \frac{-5}{4} = -1{,}25$$

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{|\mathbf{A}|} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{|\mathbf{A}|} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Jadi, } \mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Tentukan, kalau ada, balikan dari matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ berarti } \mathbf{A} \text{ singular dan } \mathbf{A}^{-1} \text{ tidak ada.}$$

12.9.2 Pembalikan Matriks Berorde lebih Tinggi

Pembalikan matriks yang berorde lebih tinggi pada prinsipnya sama seperti pembalikan matriks berorde 2×2 di atas.

$$\text{Andaikan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dan balikannya $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{B}$, maka menurut definisi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \text{-----} & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_{11} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & \text{-----} & a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$c_{ik} = 1$ jika $i = k$ di mana :
$i = 1, 2, \ldots, n$
$c_{ik} = 0$ jika $i \neq k$ $k = 1, 2, \ldots, n$

Dengan cara ini, untuk menemukan sebanyak n^2 unsur-unsur matriks balikannya (b_{ij}), terdapat n^2 persamaan mengandung b_{ij} yang harus diselesaikan. Jadi, jika misalnya matriks yang hendak dibalik berorde 4×4, berarti terdapat 4^2 unsur matriks balikan yang sama harus dicari; untuk itu terdapat 4^2 persamaan (yang mengandung unsur-unsur matriks balikan) yang harus diselesaikan. Dalam praktek sehari-hari pekerjaan membalik matriks berorde besar tidak perlu dilakukan dengan tangan atau secara manual, berbagai paket piranti-lunak (*software*) komputer tersedia untuk itu.

12.9.3 Pembalikan Matriks dengan Adjoin dan Determinan

Membalik sebuah matriks dapat pula dilakukan dengan menggunakan adjoin dan determinan dari matriks yang bersangkutan. Hubungan suatu matriks bujur sangkar yang nonsingular dengan adjoin dan determinannya adalah :

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj. } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}}$$

Dari hubungan ini terlihat, $\mathbf{A}^{-1}$ ada atau dapat dibentuk jika dan hanya jika $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Contoh :

1) Tentukan, kalau ada, balikan dari matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \text{ berarti } \mathbf{A}^{-1} \text{ ada.}$$

Minor-minornya : $M_{11} = 3$, $M_{12} = 5$, $M_{21} = 4$ dan $M_{22} = 8$.

Kofaktor $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, maka $A_{11} = (-1)^2(3) = 3$, $A_{12} = (-1)^3(5) = -5$, $A_{21} = (-1)^3(4) = -4$ dan $A_{22} = (-1)^4(8) = 8$.

$$[\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj. } \mathbf{A} = [A_{ij}]' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj. } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix}$$

Bandingkan dengan hasil penyelesaian Contoh 1) dalam Seksi 12.9.1 di depan ! Guna meyakinkan kebenaran pekerjaan membalik matriks, dapat diuji melalui hubungan $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.
Untuk contoh ini terbukti bahwa :

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}, \text{ yakni } \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Tentukan, kalau ada, balikan dari matriks $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 40 - 0 - 24 - 18 = 52 - 42 = 10$$

berarti $\mathbf{B}^{-1}$ ada.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$B_{11} = (-1)^2(-6) = -6 \quad B_{12} = (-1)^3(6) = -6 \quad B_{13} = (-1)^4(8) = 8$$
$$B_{21} = (-1)^3(-4) = 4 \quad B_{22} = (-1)^4(-1) = -1 \quad B_{23} = (-1)^5(2) = -2$$
$$B_{31} = (-1)^4(6) = 6 \quad B_{32} = (-1)^5(-11) = 11 \quad B_{33} = (-1)^6(-8) = -8$$

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & 11 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{adj. } \mathbf{B} = [B_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 6 \\ -6 & -1 & 11 \\ 8 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\text{adj. } \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}1 & 1{,}1 \\ 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}8 \end{bmatrix}$$

Di samping cara-cara yang sudah diuraikan di atas, masih terdapat dua cara lain lagi yang dapat digunakan untuk membalik sebuah matriks. Kedua cara tersebut, tidak dibahas di dalam buku ini, adalah pembalikan matriks dengan operasi baris atau kolom (eliminasi *Gauss*) dan pembalikan matriks melalui matriks bersekat.*)

12.9.4 Sifat-sifat Balikan

Balikan-balikan matriks mempunyai beberapa sifat khas, yaitu :

1. Balikan dari suatu matriks balikan adalah matriks aslinya $[\mathbf{A}^{-1}]^{-1} = \mathbf{A}$.
2. Determinan dari suatu matriks balikan sama dengan kebalikan dari determinan matriks aslinya; $|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$.
3. Balikan dari suatu matriks ubahan sama dengan ubahan matriks balikannya; $[\mathbf{A}']^{-1} = [\mathbf{A}^{-1}]'$.
4. Balikan dari perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian matriks-matriks balikannya dengan urutan yang terbalik; $[\mathbf{AB}]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
5. Balikan dari matriks satuan adalah matriks satuan itu sendiri; $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$.

Latihan Pembalikan Matriks

Tentukan — jika ada — balikan dari matriks-matriks di bawah ini :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

*)Anda yang berminat mempelajari kedua cara ini dapat membaca (misalnya) *Jean E. Weber*, "Mathematical Analysis : Business and Economic Applications", 4th edition, Harper & Row, New York, 1982; halaman 601 — 610.

3. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

9. Jika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

tentukanlah balikan dari **AB**, kalau ada.

10. Untuk **A** dan **B** seperti dalam Soal no. 9, tentukanlah balikan dari **BA** jika ada.

12.10 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Teori matriks dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Sehimpun persamaan linear, yang terdiri atas m persamaan dengan n bilangan anu, dapat disajikan dalam bentuk notasi matriks. Sebagai contoh :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{A}_{m \times n}\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{c}_{m \times 1}$$

Jika $m = n$ dan A mempunyai balikan, yakni jika A merupakan matriks bujur sangkar yang nonsingular, maka notasi sistem persamaan linear di atas dapat dituliskan menjadi :

$$\mathbf{A}_{n \times n}\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{c}_{n \times 1}$$

Penyelesaian untuk vektor-kolom **x** dapat diperoleh dengan membalik matriks A, yakni :

$$\boxed{\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{A}^{-1}{}_{n \times n}\mathbf{c}_{n \times 1}}$$

Contoh :

Andaikan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Berarti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = -36$, berarti $\mathbf{A}^{-1}$ ada; dalam hal ini

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{ccc} A11 & A12 & A13 \\ \end{array}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 14/36 & 6/36 & -2/36 \\ -1/36 & -3/36 & 5/36 \\ -23/36 & 3/36 & 7/36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 14/36 & 6/36 & -2/36 \\ -1/36 & -3/36 & 5/36 \\ -23/36 & 3/36 & 7/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Jadi, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = -4$

Penyelesaian sistem persamaan linear secara serempak, berdasarkan teori matriks, dapat pula dikerjakan dengan menggunakan kaidah *Cramer*. Penyelesaian atas

$$\mathbf{A}_{n \times n}\mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{c}_{n \times 1}.$$

untuk menghitung nilai variabel x dapat dilakukan dengan cara membagi determinan-determinannya (Ingat : dalam Seksi 6.4.3 didepan cara ini disebut pula dengan "cara determinan").

Demikian maka :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_n & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|x_1|}{|\mathbf{A}|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|x_2|}{|\mathbf{A}|}$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & c_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & c_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|x_n|}{|\mathbf{A}|}$$

Jadi, $\boxed{x_i = \dfrac{|x_i|}{|\mathbf{A}|}}$ $\quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

Penyebut pada rumusan x_i di atas adalah determinan dari matriks koefisien persamaan-persamaannya, sedangkan pembilangnya adalah determinan dari matriks koefisien tetapi setelah kolom ke-i diganti dengan kolom konstanta yang diperoleh dari ruas kanan persamaan.

Contoh :

Andaikan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

maka

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -36 \qquad |x_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -72$$

$$|x_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |x_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 144$$

$$\begin{aligned} x_1 &= |x_1| \,/\, |\mathbf{A}| = -72/-36 = 2 \\ x_2 &= |x_2| \,/\, |\mathbf{A}| = 0/-36 = 0 \\ x_3 &= |x_3| \,/\, |\mathbf{A}| = 144/-36 = -4 \end{aligned}$$

(Lihat juga contoh-contoh di dalam Seksi 6. 4. 3 di depan)

Latihan Sistem Persamaan Linear

Selesaikan himpunan-himpunan persamaan linear berikut dengan menggunakan matriks balikan dan kaidah Cramer.

1. $\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 8x_1 - 4x_2 &= 8 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_1 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 - 6x_3 &= 2 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

4. $$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y + z &= 0 \\ 5x + 4y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} -a + 2b - 3c + 4d &= 20 \\ 4a - 3b + 2c - d &= 0 \\ 2a - 2b - 2c + 2d &= 0 \\ 5a + 4b - c - d &= 12 \end{aligned}$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

BAB 13
ANALISIS MASUKAN-KELUARAN

Salah satu perkembangan menarik dari penerapan aljabar matriks dalam bidang ekonomi adalah analisis masukan-keluaran (*input-output analysis*), yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1936 oleh *Wassily W. Leontief* dari *Harvard University*. Analisis masukan-keluaran merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antarsektor atau kegiatan ekonomi. Model ini lazim diterapkan untuk menganalisis perekonomian secara makro, nasional ataupun regional.

Analisis masukan-keluaran bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sektor-sektor yang saling berkaitan. Masing-masing sektor menggunakan keluaran dari sektor lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkannya, kemudian keluaran yang dihasilkannya merupakan masukan pula bagi sektor lain. Sudah barang tentu, selain menjadi masukan bagi sektor lain, terdapat pula keluaran dari sesuatu sektor yang menjadi masukan bagi sektor itu sendiri dan sebagai barang konsumsi bagi pemakai akhir.

13.1 MATRIKS TRANSAKSI

Langkah awal dalam analisis masukan-keluaran adalah menyusun suatu tabel yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana — baik dalam satuan kuantitatif fisik atau dalam satuan nilai uang — keluaran suatu sektor terdistribusi ke (diminta oleh) sektor-sektor lain sebagai masukan dan ke (oleh) pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel demikian dinamakan matriks transaksi atau matriks masukan-keluaran. Contoh sebuah matriks transaksi dapat dilihat di bawah ini :

Matriks Transaksi Perekonomian Negara Kertagama*)

Masukan \ Keluaran	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Keluaran total	100	290	235	365	990

*)Hipotetis.

Pembacaan tabel ke samping berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran (*output*) sektor pertanian senilai 100, senilai 20 digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (*input*), senilai 35 digunakan oleh sektor industri sebagai masukan sektor tersebut, senilai 5 digunakan sebagai masukan sektor jasa dan sisanya senilai 40 dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Pembacaan tabel ke bawah berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai 100, senilai 20 berupa masukan dari sektor itu sendiri, senilai 15 berupa masukan yang berasal dari sektor industri, senilai 35 berupa masukan dari sektor jasa, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*added value*) sektor pertanian tersebut yaitu senilai 55. Nilai tambah ini sering juga disebut masukan primer (*primary input*).

Tabel transaksi bisa juga dituliskan dalam bentuk notasi matriks. Misalnya X_{ij} melambangkan keluaran dari sektor i yang dipergunakan sebagai masukan oleh sektor j, U_i melambangkan permintaan akhir terhadap keluaran sektor i, Y_j melambangkan nilai tambah sektor j, dan X_j adalah keluaran total dari sektor j, maka tabel transaksinya secara matriks :

Matriks Transaksi

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi Produksi	X_{11} X_{12} .... X_{1m}	U_1	X_1
	X_{21} X_{22} .... X_{2m}	U_2	X_2
	: :	:	:
	: :	:	:
	X_{m1} X_{m2} .... X_{mm}	U_m	X_m
Nilai tambah	Y_1 Y_2 .... Y_m	U_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran total	X_1 X_2 .... X_m	X_{m+1}	X

Pemakaian total oleh sektor i :

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + U_i \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m + 1$$

Keluaran total dari sektor j :

$$X_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + Y_j \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m + 1$$

13.2 MATRIKS TEKNOLOGI

Dari matriks transaksi di atas dapat diketahui, bahwa bagi sektor j untuk memproduksi keluaran sejumlah X_j diperlukan masukan-masukan dari sektor 1 hingga sektor m dan sejumlah tertentu nilai tambah atau masukan primer. Hal ini berarti bahwa masing-masing kolom menggambarkan hubungan masukan-keluaran antarsektor. Begitu pula pada saat yang sama matriks transaksi memberikan informasi tentang bagaimana keluaran dari sesuatu sektor terdistribusi di antara sektor-sektor yang ada, termasuk sektor konsumen akhir. Hal inipun menggambarkan hubungan masukan-keluaran antarsektor. Jika nilai setiap unsur dalam matriks transaksi tersebut dibagi dengan nilai jumlah baris atau nilai jumlah kolom yang bersesuaian (misalnya X_{1j} dibagi X_j, atau X_{2j} dibagi X_j), maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan koefisien teknologi.

Koefisien teknologi $\boxed{a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}}$ $\quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m$
$\quad j = 1, 2, \ldots\ldots, m$

Koefisien teknologi a_{ij} adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluaran sektor i yang diperlukan sebagai masukan untuk menghasilkan satu unit keluaran di sektor j.

Jika semua koefisien teknologi yang ada dihitung (a_{ij} dihitung untuk semua i dan j) dan hasil-hasilnya disajikan dalam suatu matriks, diperolehlah sebuah matriks teknologi. Jadi, matriks teknologi adalah suatu matriks dalam analisis masukan-keluaran yang unsur-unsurnya berupa koefisien teknologi. Sebagai ilustrasi, matriks teknologi untuk perekonomian Negara Kertagama di depan adalah :

	P	*I*	*J*
Pertanian	0,20	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Nilai tambah	0,55	0,43	0,49
	1,00	1,00	1,00

[Perhatikan matriks teknologi dibentuk hanya oleh "sektor-sektor utama" !]

Secara umum matriks teknologi dapat dirumuskan sebagai :

Matriks Teknologi

Sektor

$$
\begin{array}{lc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots & m \end{array} \\
\begin{array}{l} \textit{Sektor} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix} \end{array} \\
\textit{Nilai tambah} & \begin{array}{cccc} (1 - \sum\limits_i a_{i1}) & (1 - \sum\limits_i a_{i2}) & \ldots\ldots\ldots & (1 - \sum\limits_i a_{im}) \end{array}
\end{array}
$$

Sedangkan himpunan koefisien teknologi untuk unsur-unsur permintaan akhir dan keluaran total masing-masing adalah berupa vektor kolom.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

Karena koefisien masukan $a_{ij} = X_{ij} / X_j$, berarti $X_{ij} = a_{ij} X_j$.

Menurut matriks transaksi,

$$X_i = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + U_i$$

padahal $$X_{ij} = a_{ij} X_j$$

maka $$X_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j + U_i$$

Bila diuraikan,

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots\ldots + a_{im}X_m + U_i$$

atau

$$U_i = X_i - a_{i1}X_1 - a_{i2}X_2 - \ldots\ldots - a_{im}X_m$$

Untuk masing-masing i,

$$\begin{aligned} U_1 &= X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots - a_{1m}X_m \\ &= (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots - a_{1m}X_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= X_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \ldots\ldots - a_{2m}X_m \\ &= -a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 - \ldots\ldots - a_{2m}X_m \end{aligned}$$

.

.

.

.

$$\begin{aligned} U_m &= X_m - a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \ldots\ldots - a_{mm}X_m \\ &= -a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \ldots\ldots - (1 - a_{mm})\,X_m \end{aligned}$$

atau jika ditulis secara ringkas dengan notasi matriks :

$$\boxed{\mathbf{U}_{m \times 1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})_{m \times m}\, \mathbf{X}_{m \times 1}}$$

U dan **X** masing-masing adalah vektor-kolom permintaan akhir dan vektor-kolom secara keluaran total, **I** adalah matriks satuan, sedangkan **A** adalah matriks teknologi yang dibentuk berdasarkan matriks transaksi.

Jika matriks **I** — **A** nonsingular, yakni jika $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$, maka ia akan mempunyai balikan. Dalam hal ini $\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}$ dapat ditulis menjadi

$$\boxed{\mathbf{X}_{m \times 1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}_{m \times m}\, \mathbf{U}_{m \times 1}}$$

Ini berarti bahwa jika matriks **A** dan vektor **U** diketahui, maka vektor **X** dapat dicari secara langsung menuruti kaidah perkalian matriks. Dengan kata lain jika masing-masing koefisien masukan antar sektor dan permintaan akhir untuk setiap sektor diketahui datanya, maka dapatlah dihitung keluaran total dari masing-masing sektor. Lebih lanjut, dengan dapat dihitungnya keluaran total sektoral akan dapat pula dihitung keluaran total nasional (GDP atau GNP). Di sinilah letak arti pentingnya analisis masukan-keluaran. Satu hal yang penting diperhatikan dalam analisis masukan-keluaran di sini adalah bahwa koefisien masukan dianggap senantiasa konstan. Jadi model masukan-keluaran yang disajikan di sini merupakan analisis statis. Analisis masukan-keluaran dinamis tidak dimuat dalam buku ini.

Kasus 78

Untuk kasus Negara Kertagama di atas, hitunglah keluaran total masing-masing sektor dan nilai tambahnya jika ditargetkan permintaan akhir terhadap sektor pertanian, industri dan jasa masing-masing 100, 300 dan 200. Susunlah matriks transaksi yang baru.

Sebagaimana diketahui, berdasarkan perhitungan di muka matriks teknologinya adalah :

$$\begin{array}{l} \\ \textit{Pertanian} \\ \textit{Industri} \\ \textit{Jasa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad P \quad & \quad I \quad & \quad J \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}$$

Menurut rumus $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{U}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0,20 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 1-0,28 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 1-0,23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Determinan } |\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= (0,80)(0,72)(0,77) + (-0,12)(-0,26)(-0,10) + \\ &\quad (-0,02)(-0,17)(-0,15) - (-0,10)(0,72)(-0,02) \\ &\quad - (-0,15)(-0,12)(0,77) - (0,80)(-0,26)(-0,17) \\ &= 0,38923 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj.}\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

$$\begin{matrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{matrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{bmatrix} : 0,38923$$

$$= \begin{bmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{bmatrix}$$

Jadi, keluaran total masing-masing sektor akan menjadi

Pertanian	=	228,33
Industri	=	618,02
Jasa	=	425,83

Sedangkan nilai tambah sektor

Pertanian	=	$0,55 \times 228,33$	=	125,58
Industri	=	$0,43 \times 618,02$	=	265,06
Jasa	=	$0,49 \times 425,83$	=	208,66

Matriks transaksi yang baru

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Pertanian	45,67	74,16	8,51	100	228,33
Industri	34,25	173,05	110,72	300	618,02
Jasa	22,83	105,75	97,94	200	425,83
Nilai tambah	125,58	265,06	208,66		
Keluaran total	228,33	618,02	425,83		

Dalam hal ini empat kotak masih kosong; jika salah satu diketahui unsurnya, maka unsur-unsur untuk kotak kosong lainnya akan dapat dihitung.

Latihan Analisis Masukan — Keluaran

1. Hubungan masukan-keluaran antarsektor dalam perekonomian sebuah negara diketahui seperti ditunjukkan oleh tabel transaksi di bawah ini.

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Pertanian	11	19	1	10	41
Industri	5	89	40	106	240
Jasa	5	37	37	106	185
Nilai tambah	20	95	107	21	243
Keluaran total	41	240	185	243	659

   a) Hitunglah masing-masing koefisien masukannya.
   b) Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian, sektor industri dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah jadi 25, 201 dan 45, berapa keluaran total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut ?
   c) Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor.

2. Untuk data serupa dengan soal di atas, hitunglah keluaran total per sektor bila permintaan akhirnya berubah menjadi 30 untuk sektor pertanian, 150 (industri) dan 125 (jasa).

3. Andaikan hubungan masukan-keluaran antarsektor dalam suatu perekonomian ditunjukkan oleh tabel berikut.

	Sektor *A*	Sektor *B*	Sektor *C*	Permintaan akhir
Sektor *A*	80	100	100	40
Sektor *B*	80	200	60	60
Sektor *C*	80	100	100	20

a) Hitunglah masing-masing koefisien masukannya.

b) Berapa keluaran total per sektor bila permintaan akhir terhadap setiap sektor diharapkan merata menjadi sama-sama 60 ?

c) Hitung juga perubahan nilai tambah setiap sektor.

4. Berkenaan data Soal no. 3, bila permintaan akhir berubah menjadi 120 (sektor *A*) dan 40 (sektor *B*) serta 10 (sektor *C*), berapa kenaikan atau penurunan keluaran total masing-masing sektor ?

BAB 14
PROGRAMASI LINEAR

Programasi linear (*linear programming*) merupakan pengembangan lebih lanjut dari konsep-konsep aljabar linear. Model ini dikembangkan oleh *George B. Dantzig*, seorang matematisian Amerika Serikat, pada tahun 1947. Benih-benih model ini sesungguhnya sudah ditemukan jauh sebelumnya. Seorang matematisian Russia bernama *L.V. Kantorovich* memperkenalkan penerapan programasi linear dalam bidang produksi pada tahun 1939. Lebih dari seabad sebelumnya, pada tahun 1826, *Fourier* yang matematisian Perancis juga telah merumuskan masalah programasi linear. Akan tetapi baru setelah Dantzig mengembangkan dan mempopulerkannya, model ini memperoleh perhatian yang berarti. Dantzig pulalah yang dikenal dunia sebagai "bapak programasi linear".

Semula model ini dimanfaatkan di bidang kemiliteran, khususnya oleh Angkatan Udara Amerika Serikat (USAF), untuk merencanakan dan memecahkan masalah-masalah logistik di masa perang. Kemudian di bidang transportasi dan bisnis. Sekarang penggunaan programasi linear sudah sangat meluas, terutama di bidang bisnis. Berbagai masalah dalam aspek-aspek kegiatan perusahaan — seperti masalah produksi, pembiayaan, pemasaran, periklanan dan penyampaian barang — semakin lazim dipecahkan dengan programasi linear. Bab ini hanya menguraikan konsep-konsep dasar programasi linear. Mengingat pengajaran materi programasi linear dalam matakuliah matematika bersifat hanya sebagai "perkenalan", tidak semua aspek dari model tersebut dikupas di sini. Seluk beluk yang lebih terinci mengenai programasi linear biasanya diberikan di dalam matakuliah "operations research" atau "metoda-metoda kuantitatif untuk manajemen". Oleh karenanya bahasan yang lebih lengkap tentang model ini akan dapat dijumpai di dalam buku-buku teks mengenai operations research, atau buku yang khusus membahas programasi linear.

14.1 IDE DASAR PROGRAMASI LINEAR

Programasi linear ialah suatu model optimisasi persamaan linear berkenaan dengan kendala-kendala linear yang dihadapinya. Masalah programasi linear berarti adalah masalah pencarian nilai-nilai optimum (maksimum atau minimum) sebuah fungsi linear pada suatu sistem atau sehimpun kendala linear. Fungsi linear yang hendak dicari nilai optimumnya, berbentuk sebuah persamaan, disebut fungsi tujuan. Sedangkan fungsi-fungsi linear yang harus terpenuhi dalam optimisasi fungsi tujuan tadi, dapat berbentuk persamaan maupun pertidaksamaan, disebut fungsi kendala.

Agar suatu masalah optimisasi dapat diselesaikan dengan programasi linear, ada beberapa syarat atau karakteristik yang harus dipenuhi, yaitu :

1. Masalah tersebut harus dapat diubah menjadi permasalahan matematis. Ini berarti bahwa masalah tadi harus bisa dituangkan ke dalam bentuk model matematik, dalam hal ini model linear, baik berupa persamaan maupun pertidaksamaan.
2. Keseluruhan sistem permasalahan harus dapat dipilah-pilah menjadi satuan-satuan aktivitas; sebagai misal : $a_{11} X_1 + a_{12}X_2 \leqslant k_1$, di mana X_1 dan X_2 adalah aktivitas.
3. Masing-masing aktivitas harus dapat ditentukan dengan tepat baik jenis maupun letaknya dalam model programasi.
4. Setiap aktivitas harus dapat dikuantifikasikan sehingga masing-masing nilainya dapat dihitung dan dibandingkan.

Dengan demikian di dalam suatu masalah programasi linear harus terdapat rangkaian "kendala-aktivitas-tujuan" atau "masukan-aktivitas-keluaran".

Perumusan model programasi linear dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan aktivitas
2. Menentukan sumber-sumber (masukan)
3. Menghitung jumlah masukan dan keluaran untuk setiap satuan aktivitas
4. Menentukan kendala-kendala aktivitas
5. Merumuskan model, yakni membentuk fungsi tujuan dan fungsi-fungsi kendalanya.

Contoh Perumusan Model Programasi Linear

Andaikan sebuah perusahaan yang menghasilkan dua macam keluaran, yaitu barang *A* dan barang *B*, menggunakan dua macam bahan mentah yakni *R* dan *S* sebagai masukannya. Baik barang *A* maupun barang *B* masing-masing menggunakan masukan R dan masukan S dalam proses produksinya. Setiap unit keluaran A memerlukan 4 unit masukan R dan 3 unit masukan S, sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit R dan 4 unit S. Harga jual produk A dan produk B masing-masing Rp 5.000,00 dan Rp 6.000,00 per unit. Jumlah persediaan masukan R dan masukan S yang dimiliki oleh perusahaan ini masing-masing 100 unit dan 120 unit. Berapa unit A dan B harus dihasilkan agar penerimaan perusahaan maksimum, dengan keterbatasan atau kendala bahwa penggunaan masukan R dan masukan S masing-masing tidak melebihi 100 unit dan 120 unit ?

Masalah programasi linear yang muncul di sini ialah memaksimumkan penerimaan, yakni menentukan kombinasi jumlah barang A dan jumlah barang B yang sebaiknya dihasilkan sehubungan dengan kondisi-kondisi yang dihadapi. Agar dapat diselesaikan dengan model programasi linear, permasalahannya haruslah dituangkan ke dalam bentuk model tersebut, berarti harus dirumuskan fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan dan fungsi-fungsi kendala yang dihadapi. Misalkan z melambangkan penerimaan perusahaan sedangkan a dan b masing-masing melambangkan jumlah A dan jumlah B, maka :

fungsi tujuannya	:	$z = 5000a + 6000b$
fungsi kendalanya	:	$4a + 2b \leqslant 100$
		$3a + 4b \leqslant 120$

Fungsi kendala yang pertama berkenaan dengan masukan R; karena setiap unit A memerlukan 4 unit R dan setiap unit B memerlukan 2 unit R, padahal jumlah masukan R yang dapat digunakan tidak mungkin melebihi (berarti boleh kurang atau sama dengan) 100 unit, maka haruslah $4a + 2b \leqslant 100$. Sedangkan fungsi kendala yang kemudian berkenaan dengan masukan atau bahan mentah S; karena setiap unit A membutuhkan 3 unit S dan setiap unit B membutuhkan 4 unit S, padahal jumlah masukan S yang dapat dipakai tidak mungkin lebih dari (berarti boleh kurang dari atau sama dengan) 120 unit, maka haruslah $3a + 4b \leqslant 120$. Perumusan fungsi tujuan dan fungsi kendala ini akan lebih mudah dilakukan dengan menggunakan bantuan tabel permasalahannya, yang berisi keterangan-keterangan tentang masukan dan keluaran serta kendalanya masing-masing.

Tabel Permasalahan

		Keluaran		Kendala masukan
		A	*B*	
Masukan	*R*	4	2	100
	S	3	4	120
Kendala keluaran		5000	6000	

14.2 BENTUK UMUM MODEL PROGRAMASI LINEAR

Sebagaimana telah dinyatakan sebelumnya, masalah programasi linear tak lain adalah masalah optimisasi bersyarat, yakni pencarian nilai maksimum (maksimisasi) atau pencarian nilai minimum (minimisasi) sesuatu fungsi tujuan berkenaan dengan keterbatasan-keterbatasan atau kendala yang harus dipenuhi. Masalah-masalah tersebut secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut :

Masalah maksimisasi

Maksimumkan fungsi tujuan

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots + c_n x_n$$

terhadap kendala-kendala

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots\dots\dots & + & a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots\dots\dots & + & a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots\dots\dots & + & a_{mn}x_n & \leqslant & b_m
\end{array}$$

di mana :

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Ringkasnya, maksimumkan $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{terhadap} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m.$$

Masalah minimisasi

Minimumkan fungsi tujuan

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n x_n$$

terhadap kendala-kendala

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m
\end{array}$$

di mana : $x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

Ringkasnya, minimumkan $\quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{terhadap} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j$$

$$x_j \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m.$$

Masalah maksimisasi dijumpai misalnya dalam kasus penentuan kombinasi jumlah produk (*product-mix*) guna memperoleh profit maksimum. Sedangkan masalah minimisasi ditemui misalnya dalam kasus upaya menekan biaya produksi. Variabel x_j, yang mencerminkan aktivitas, dalam programasi linear disebut juga variabel keputusan (*decision variable*). Variabel keputusan tidak boleh negatif, karenanya di dalam setiap rumusan model programasi linear (harus) selalu dicantumkan notasi $x_j \geqslant 0$. Hal ini dikenal dengan sebutan "pembatasan ketidaknegatifan" (*non-negativity restriction*).

Kendala-kendala dalam sebuah masalah programasi linear tidak selalu harus berbentuk pertidaksamaan yang seragam. Dalam kasus tertentu dapat terjadi salah satu kendala, atau lebih, berbentuk persamaan. Dapat pula terjadi di dalam sebuah masalah terdapat kendala pertidaksamaan berbentuk $\geqslant$ maupun $\leqslant$.

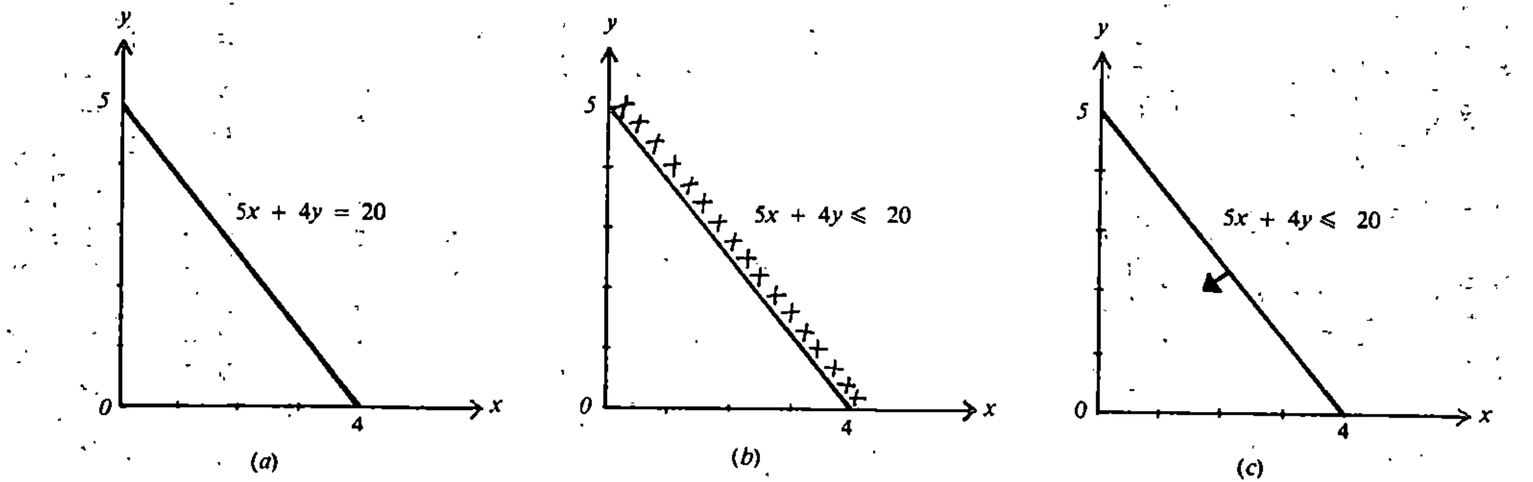
Penyelesaian masalah programasi linear dapat dikerjakan dengan tiga macam cara atau metoda, yaitu metoda grafik (geometri), metoda aljabar dan metoda simplex.

14.3 METODA GRAFIK

Penyelesaian dengan metoda grafik atau geometri dilakukan dengan jalan menggambarkan fungsi-fungsinya (fungsi kendala maupun fungsi tujuan !) pada sistem sepasang sumbu-silang, di mana sumber-sumber horizontal dan vertikal masing-masing mencerminkan jumlah setiap keluaran. Secara umum langkah-langkah penyelesaian dengan metoda grafik, setelah model permasalahannya dirumuskan, adalah sebagai berikut :

1. Gambarkan fungsi-fungsi kendalanya.
2. Tentukan area laik (*feasible area*) bagi masalah yang bersangkutan, yakni area yang dibatasi oleh garis-garis kendala.
3. Gambarkan fungsi tujuannya dengan menetapkan sebarang nilai z.
4. Lakukan pergeseran-pergeseran seperlunya atas kurva atau garis tujuan, dengan mengubah-ubah nilai z, agar dapat ditentukan titik penyelesaian optimal.
5. Titik penyelesaian optimal adalah titik sudut terjauh dari area laik yang dapat dicapai oleh garis tujuan. Dalam masalah maksimisasi, sudut area laik terjauh biasanya berupa sudut teratas atau terkanan; sedangkan dalam masalah minimisasi, sudut area laik terjauh biasanya berupa sudut terbawah atau terkiri (tergantung pada lereng garis tujuannya).

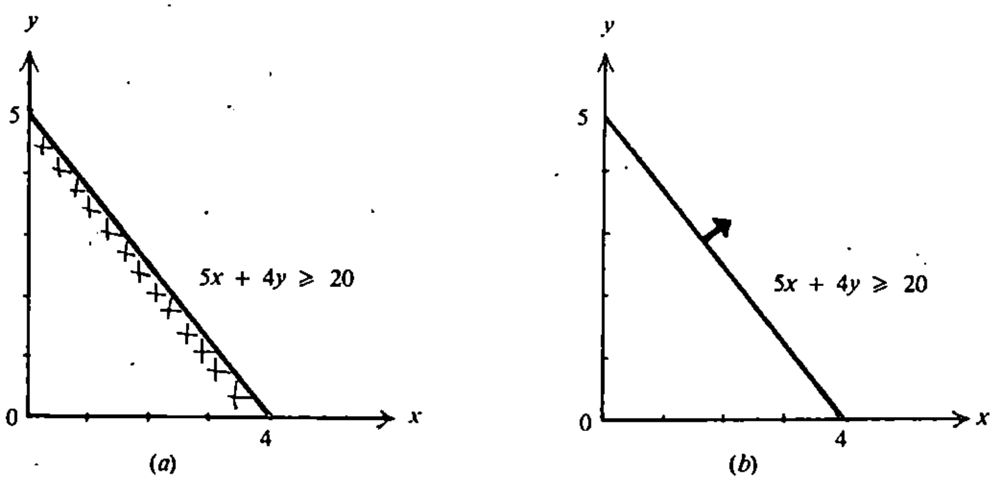
Sebelum memulai dengan contoh-contoh kasus, ada baiknya terlebih dahulu diketahui cara menyajikan pertidaksamaan linear secara grafik. Perhatikan ketiga gambar di bawah ini dan kalimat-kalimat fungsinya.



Gambar 14—1

Panel (a) memperlihatkan gambar dari sebuah persamaan. Wilayah persamaan $5x + 4y = 20$ adalah titik-titik sepanjang garis yang bersangkutan. Sedangkan panel (b) dan (c) memperlihatkan gambar dari sebuah pertidaksamaan. Tanda-tanda silang pada panel (b) mengisyaratkan bahwa bidang di sebelah atas/kanan garis tidak termasuk wilayah pertidaksamaan $5x + 4y \leqslant 20$, jadi wilayahnya adalah mulai dari garis yang bersangkutan ke bawah/kiri. Atau dengan cara yang ditunjukkan oleh panel (c); anak panah di situ menjelaskan wilayah yang termasuk di dalam pertidaksamaan $5x + 4y \leqslant 20$.

Banyak cara dapat dilakukan untuk menggambarkan wilayah suatu pertidaksamaan linear. Yang jelas, gambarnya bukan semata-mata berupa sebuah garis. Untuk pertidaksamaan yang bertanda $\geqslant$, perhatikan contoh-contoh berikut.



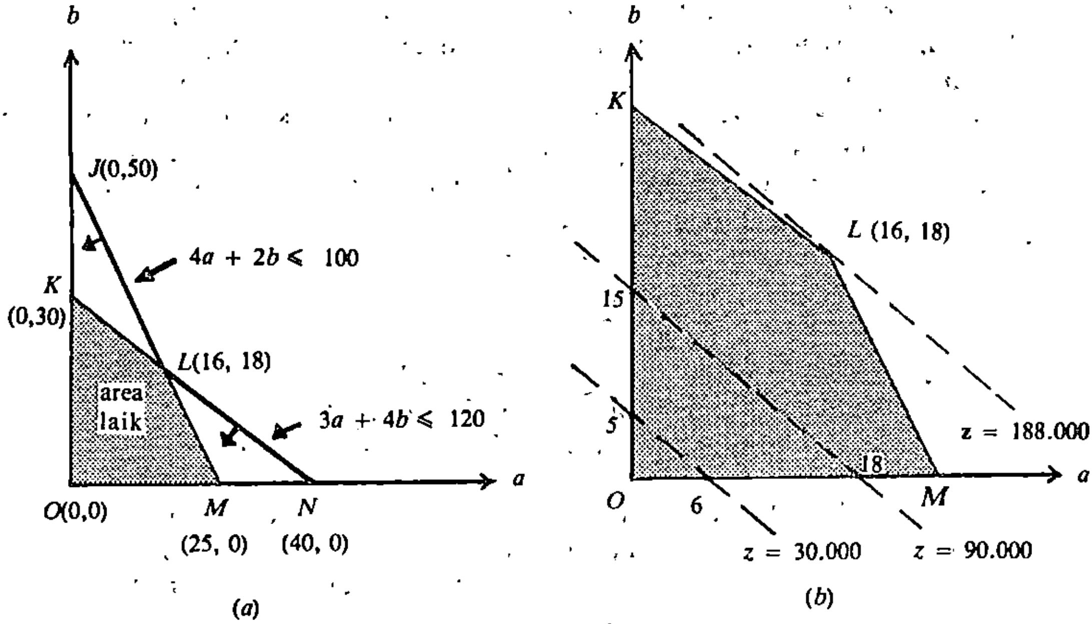
Gambar 14—2

Bidang di bawah/kiri garis tidak termasuk wilayah $5x + 4y \geqslant 20$.

Kasus 79

Andaikan kita menghadapi masalah seperti yang terdapat di dalam contoh perumusan model di depan, yakni :

Maksimumkan fungsi tujuan $z = 5000\,a + 6000\,b$
terhadap kendala-kendala $4a + 2b \leqslant 100$
$3\,a + 4b \leqslant 120$
$a, b \geqslant 0$



Gambar 14—3

Area penyelesaian yang laik (*feasible area*) bagi masalah yang dihadapi oleh perusahaan ini adalah bidang *OKLM* yang diarsir. Menghasilkan kombinasi jumlah *A* dan *B* di atas/kanan bidang *OKLM* merupakan hal yang tidak mungkin dapat dilakukannya, mengingat keterbatasan sumberdaya atau masukan (dalam hal ini bahan mentah) yang dimiliki. Area di luar bidang *OKLM* disebut area taklaik (*unfeasible area*).

Pada panel (b) yang gambarnya diperbesar, fungsi tujuan $z = 5000\,a + 6000\,b$ digambarkan dengan mencobakan nilai-nilai z tertentu. Di sini terlihat bahwa sudut area laik terjauh yang dapat dicapai oleh garis fungsi tujuan adalah titik *L*. Titik *L* ini, yang merupakan perpotongan antara kedua garis kendala, terletak pada kedudukan $a = 16$ dan $b = 18$. Berarti penyelesaian optimalnya adalah memproduksi barang *A* sebanyak 16 unit dan barang *B* sebanyak 18 unit. Penerimaan maksimum yang diperoleh dengan kombinasi ini adalah $z = 5000\,(16) + 6000\,(18) = 188.000$.

Bila perlu, hasil penyelesaian ini dapat diuji kebenarannya. Pengujian dilakukan terhadap kendala-kendala yang ada, guna membuktikan kelaikan; dan terhadap semua kemungkinan penyelesaian — yakni sudut-sudut area laik (*feasible corners*) — guna membuktikan optimalitas.

Pengujian terhadap kendala :

$4a + 2b \leqslant 100 \rightarrow 4(16) + 2(18) \leqslant 100$ terpenuhi
$3a + 4b \leqslant 120 \rightarrow 3(16) + 4(18) \leqslant 120$ terpenuhi

Karena ruas kiri fungsi kendala mencerminkan jumlah masukan yang terpakai dan ruas kanan menunjukkan jumlah masukan yang tersedia, maka dengan membandingkan kedua ruas dapat diketahui jumlah masukan yang tersisa atau tidak terpakai. Dalam kasus ini, baik masukan R (lihat pengujian terhadap kendala pertama) maupun masukan S (lihat pengujian terhadap kendala kedua) semuanya terpakai habis, tidak ada yang tersisa. Berdasarkan pengujian terhadap kendala-kendala ini terbukti bahwa kombinasi produksi 16 A dan 18 B adalah laik.

Pengujian terhadap optimalitas :

$$\begin{aligned} K(0, 30) &\rightarrow z = 5000(0) + 6000(30) = 180.000 \\ L(16, 18) &\rightarrow z = 5000(16) + 6000(18) = 188.000 \\ M(25, 0) &\rightarrow z = 5000(25) + 6000(0) = 125.000 \end{aligned}$$

Titik O (0, 0) tak perlu diuji karena jelas $z = 0$. Sedangkan titik J dan N juga tidak perlu diuji karena di luar area laik. Berdasarkan pengujian optimalitas ini terbukti bahwa titik L, kombinasi produksi 16 A dan 18 B, adalah yang terbaik.

Kasus 80

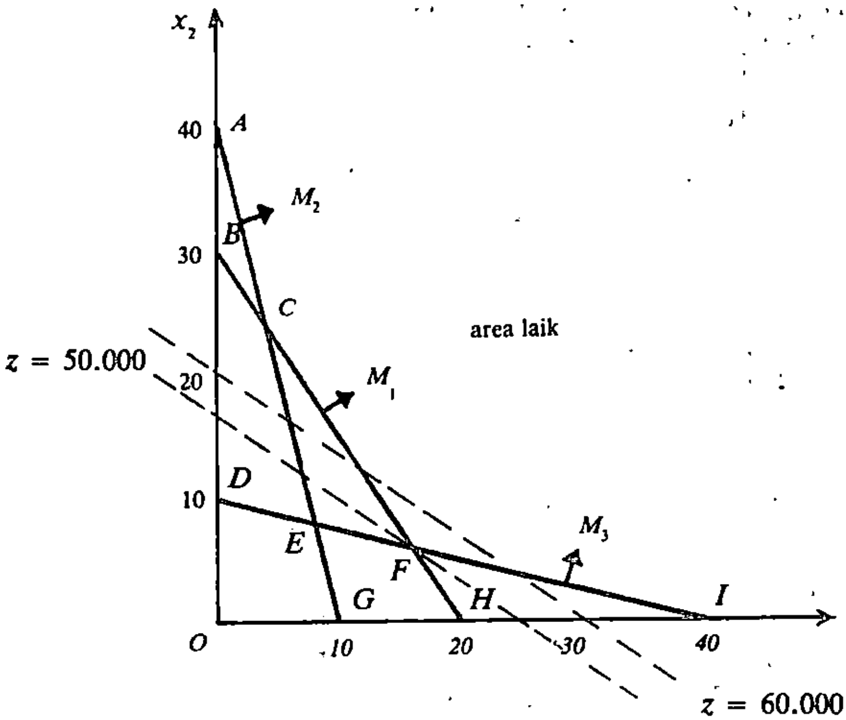
Sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, X_1 dan X_2, masing-masing menggunakan tiga macam bahan yaitu M_1, M_2 dan M_3. Setiap unit X_1 memerlukan 3 unit M_1, 4 unit M_2 dan 2 unit M_3. Sedangkan tiap unit X_2 membutuhkan 2 unit M_1, 1 unit M_2 dan 8 unit M_3. Biaya total untuk membuat X_1 dan X_2 masing-masing Rp 2 ribu dan Rp 3 ribu per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak-tidaknya 60 unit M_1, 40 unit M_2 dan 80 unit M_3 untuk diproses menjadi barang-barang yang dihasilkannya. Berapa unit masing-masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal ?

$$\begin{aligned} &\text{Minimumkan } z = 2000\,x_1 + 3000\,x_2 \\ &\text{terhadap kendala } M_1 : \; 3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 60 \\ &\qquad\quad \text{kendala } M_2 : \; 4\,x_1 + x_2 \geq 40 \\ &\qquad\quad \text{kendala } M_3 : \; 2\,x_1 + 8\,x_2 \geq 80 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Area laiknya adalah bidang terbuka $ACFI$. Sudut terjauh yang dapat ditarik oleh garis tujuan adalah titik F (16, 6), perpotongan antara kendala M_1 dan kendala M_3.

Jadi,

X_1 = 16 unit
X_2 = 6 unit



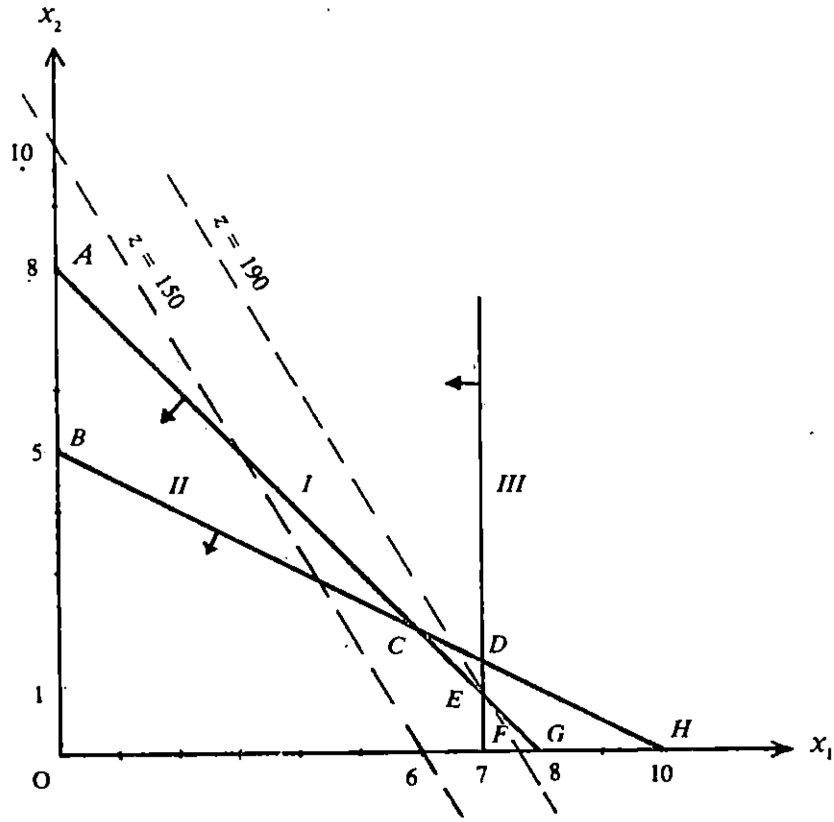
Gambar 14—4

Biaya total minimum per hari, dengan memproduksi 16 X_1, dan 6 X_2, adalah Rp 50 ribu (sebagai perbandingan : pada A, z = 120 ribu; pada C, z = 80 ribu; sedangkan di titik I, z = 80 ribu).

Kasus 81

PT "Double-X" memproduksi dua macam barang, X_1 dan X_2, masing-masing mendatangkan profit 25 ribu dan 15 rupiah per unit. Produk X_1 dibuat dari campuran masukan-masukan K, L dan M. Sedangkan X_2 hanya dibuat dari campuran K dan L. Tiap unit X_1 terdiri atas 3 K, 2 L dan 3 M, sementara tiap unit X_2 hanya terdiri atas 3 unit K dan 4 unit L. Jumlah masukan yang tersedia untuk diolah masing-masing tidak melebihi 24 unit K, 20 unit L dan 21 unit M per menit. Berapa unit masing-masing barang harus dihasilkan per menit agar profit optimal ?

Maksimumkan	$z = 25x_1 + 15x_2$	
terhadap (I)	: $3x_1 + 3x_2 \leqslant 24$	(masukan K)
(II)	: $2x_1 + 4x_2 \leqslant 20$	(masukan L)
(III)	: $3x_1 \qquad \leqslant 21$	(masukan M)
	$x_1, x_2 \geqslant 0$	



Gambar 14—5

Area laiknya adalah bidang $OBCEF$. Penyelesaian optimal pada titik E (7, 1) dengan $z = 190$.
Jadi, dengan memproduksi $7X_1$ dan $1X_2$ per menit diperoleh profit maksimum 190 rupiah.

Jumlah masukan yang terpakai :

$$K = 3x_1 + 3x_2 = 3(7) + 3(1) = 24$$
$$L = 2x_1 + 4x_2 = 2(7) + 4(1) = 18$$
$$M = 3x_1 = 3(7) = 21$$

Semua masukan K dan L yang tersedia habis terpakai, sedangkan untuk masukan L terdapat sisa yang tidak terpakai sebanyak 20 — 18 = 2 unit.

Catatan tentang metoda grafik

1. Metoda grafik terbatas pemakaiannya hanya untuk masalah dengan dua variabel keputusan.
2. Metoda ini dapat pula diselesaikan tanpa menggambarkan garis dari fungsi tujuannya, yakni dengan cara langsung menguji optimalitas dari titik-titik sudut yang terdapat pada area laik. [Dalam Kasus 81 (PT "Double-X") ini berarti menguji optimalitas titik-titik B, C, E dan F].
3. Dalam hal lereng fungsi tujuan sama dengan lereng salah satu kendala yang membentuk area laik, maka akan terdapat lebih dari dua titik optimum.
4. Kendala yang melalui titik penyelesaian optimal disebut kendala mengikat (*binding constraint*), sedangkan yang tidak melalui titik optimum disebut kendala tidak mengikat (*non-binding constraint*). Dalam kasus PT "Double-X" di atas, kendala I dan III merupakan kendala-kendala yang mengikat karena melalui titik optimum E, sedangkan kendala II merupakan kendala yang tidak mengikat.

14.4 METODA ALJABAR

Metoda aljabar dilakukan melalui penyelidikan optimalitas secara bertahap sampai diperoleh penyelesaian yang optimal. Pada setiap tahap penyelesaian dilakukan pengujian mengenai kelaikan (*feasibility*) penyelesaian yang bersangkutan, dan penyidikan (*detection*) mengenai kemungkinan perbaikan optimalitas untuk tahap penyelesaian berikutnya. (Pekerjaan ini mirip dengan penyelidikan optimalitas sudut-sudut area laik yang terdapat di dalam metoda grafik).

Sebelum penyelesaian tahap pertama dimulai, perlu dilakukan standarisasi rumusan model, yakni mengubah kendala-kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan menjadi berbentuk persamaan. Caranya ialah dengan memasukkan unsur variabel semu pada ruas kiri fungsi kendala. Untuk fungsi kendala yang bertanda $\leqslant$, dilakukan penambahan "variabel senjang" (*slack variable*). Sedangkan untuk fungsi kendala bertanda $\geqslant$, dilakukan pengurangan "variabel surplus" (*surplus variable*).

Contoh :

$2x_1 + 5x_2 \leqslant 40$ menjadi $2x_1 + 5x_2 + s = 40$

$2x_1 + 5x_2 \geqslant 40$ menjadi $2x_1 + 5x_2 - s = 40$

Penyelesaian metoda aljabar diawali dengan me-nol-kan semua variabel keputusan, ini merupakan penyelesaian tahap pertama. Kemudian dilanjutkan dengan penyelesaian tahap-tahap berikutnya, dengan mempertimbangkan kelaikan dan optimalitasnya. Pekerjaan dikatakan selesai (penyelesaian dianggap optimal) apabila pada suatu tahap penyelesaian tertentu tidak terdapat lagi kemungkinan perbaikan optimalitas. Secara umum langkah-langkah penyelesaian dengan metoda aljabar, setelah model permasalahannya dirumuskan, adalah sebagai berikut :

1. Lakukan standarisasi rumusan model.
2. Kerjakan penyelesaian tahap pertama dengan me-nol-kan semua variabel keputusan.
3. Berdasarkan koefisien-koefisien variabel keputusan yang terdapat pada fungsi tujuan, tentukan salah satu variabel dengan optimalitas "terbaik" (sesuai dengan masalahnya : maksimisasi atau minimisasi).
4. Kerjakan penyelesaian tahap berikutnya berdasarkan kelaikan variabel pilihan tadi, yakni selidiki optimalitas fungsi tujuan dan sidik apakah masih terdapat kemungkinan perbaikan optimalitas. (Terdapat atau tidaknya kemungkinan perbaikan optimalitas akan terlibat dari persamaan fungsi tujuan baru yang terbentuk pada tahap ini).
5. Jika sudah tidak terdapat kemungkinan perbaikan optimalitas berarti pekerjaan selesai, penyelesaian optimal tercapai. Jika masih terdapat kemungkinan perbaikan, ulangi langkah ke-3 dan ke-4 terus menerus sampai diperoleh penyelesaian optimal.

Kasus 82

Andaikan masalah yang dihadapi oleh PT "Double-X" dalam Kasus 81 di depan, yakni :

Maksimumkan $z = 25x_1 + 15x_2$

terhadap

$3x_1 + 3x_2 \leq 24$ .... (kendala masukan K)

$2x_1 + 4x_2 \leq 20$ .... (kendala masukan L)

$3x_1 \leq 21$ .... (kendala masukan M)

$x_1, x_2 \geq 0$

sekarang kita selesaikan dengan metoda aljabar.

Standarisasi model

Maksimumkan $z = 25\,x_1 + 15\,x_2$ (I)

$$\begin{array}{llll} \text{terhadap} & 3x_1 + 3x_2 + s_1 = 24 & \text{atau} \quad s_1 = 24 - 3x_1 - 3x_2 & \text{(II)} \\ & 2x_1 + 4x_2 + s_2 = 20 & \text{atau} \quad s_2 = 20 - 2x_1 - 4x_2 & \text{(III)} \\ & 3x_1 \qquad + s_3 = 21 & \text{atau} \quad s_3 = 21 - 3x_1 & \text{(IV)} \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Penyelesaian tahap pertama : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Karena } x_1 = 0 \\ \qquad\quad x_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{maka berdasarkan (I), (II), (III) dan (IV) :} \\ z = 0, \quad s_1 = 24, \quad s_2 = 20 \quad \text{dan} \quad s_3 = 21. \end{array}$$

Menurut persamaan fungsi tujuan [persamaan (I)], setiap unit X_1 mendatangkan profit 25 sedangkan setiap unit X_2 hanya mendatangkan profit 15. Berarti untuk penyelesaian tahap berikut sebaiknya terlebih dahulu "diproduksi" barang X_1, sementara X_2 tetap dipertahankan nol. Jumlah X_1 yang sebaiknya diproduksi diusahakan seoptimal mungkin, yakni jumlah terbanyak namun tetap dalam batas-batas kelaikan.

Jika $x_2 = 0$ dan semua masukan K, L serta M terpakai habis (dengan perkataan lain $s_1 = s_2 = s_3 = 0$), maka
menurut (II) : $x_1 = 24/3 = 8$ → taklaik
menurut (III) : $x_1 = 20/2 = 10$ → taklaik
menurut (IV) : $x_1 = 21/3 = 7$ → taklaik

$x_1 = 8$ dan $x_1 = 10$ tidak laik karena jumlah masukan M yang dimiliki tidak mencukupi. Perhatikan persamaan (IV); jika $x_1 = 8$ berarti dibutuhkan $3(8) = 24$ unit masukan M, padahal persediaannya tidak melebihi 21 unit. Jadi, jumlah x_1 yang optimal (terbanyak dan laik) untuk dianalisis pada tahap penyelesaian berikutnya adalah 7 unit.

Penyelesaian tahap kedua : $x_1 = 7$, $x_2 = 0$

Karena $x_1 = 7$ dan $x_2 = 0$ maka berdasarkan

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} : & z = 25(7) + 15(0) = 175 \\ \text{(II)} : & s_1 = 24 - 3(7) - 3(0) = 3 \\ \text{(III)} : & s_2 = 20 - 2(7) - 4(0) = 6 \\ \text{(IV)} : & s_3 = 21 - 3(7) = 0 \end{array}$$

Pada tahap ini perlu dilakukan penyesuaian terhadap persamaan fungsi tujuan, yakni dengan mensubstitusikan x_1 dari persamaan (IV).

Menurut (IV) : $3x_1 + s_3 = 21$

$$\text{berarti} \qquad 3x_1 = 21 - s_3 \;\rightarrow\; x_1 = 7 - \frac{1}{3}\, s_3 \qquad \text{(V)}$$

Mengapa persamaan (IV) harus diubah dalam satuan variabel keputusan ? Karena pada tahap ini variabel semunya (s_3) sama dengan nol ! Mengapa perubahan tersebut dinyatakan dalam satuan variabel x_1 ? Karena pada tahap ini x_1 merupakan variabel keputusan yang dianalisis !

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (V) ke dalam persamaan fungsi tujuan yang asli (I), diperoleh persamaan fungsi tujuan baru.

$$z = 25x_1 + 15x_2 \qquad \text{(I)}$$

$$z = 25\,(7 - \frac{1}{3}\,s_3) + 15x_2$$

$$z = 175 - \frac{25}{3}\,s_3 + 15x_2 \qquad \text{(VI)}$$

Dari persamaan fungsi tujuan yang baru ini terlihat bahwa optimalitas bisa diperbaiki dengan memproduksi (memulai atau menambah) barang X_2, yang setiap unitnya akan mendatangkan profit 15. Sedangkan jumlah barang X_1, pada tahap penyelesaian berikutnya tidak berubah (tetap $x_1 = 7$) sebab di dalam fungsi tujuan yang baru ini tidak tercantum lagi variabel x_1. Koefisien -25/3 pada variabel s_3 mencerminkan bahwa jika s_3 bertambah satu unit (masukan M yang tidak digunakan bertambah satu unit), maka profit berkurang sebesar 25/3. Jelas kita tidak akan melakukan hal ini sebab justru akan memperburuk optimalitas. Sebisa-bisanya justru semua variabel semu di sini diusahakan nol, yang berarti tidak ada masukan tersisa.

Uraian di atas menyimpulkan bahwa pada tahap penyelesaian berikutnya harus "diproduksi" barang X_2 (harus $x_2 \neq 0$), sedangkan jumlah X_1 harus dipertahankan 7 unit. Masalahnya berapa unit X_2 yang optimal untuk diproduksi ? Kembali kita perlu melakukan analisis seperti pada tahap pertama.

Jika $x_1 = 7$ dan semua masukan terpakai habis ($s_1 = s_2 = s_3 = 0$), maka
menurut (II) : $x_2 = 3/3 = 1$ → laik
menurut (III) : $x_2 = 6/4 = 1{,}5$ → taklaik
menurut (IV) : x_2 tidak dapat dinyatakan ,karena persamaan ini tidak mengandung variabel x_2.

$x_2 = 1{,}5$ tidak laik sebab (bersama-sama dengan $x_1 = 7$) berarti dibutuhkan masukan K sejumlah 25,5 unit [uji persamaan (II) !], padahal hanya tersedia 24 unit. Dengan demikian kombinasi jumlah optimal yang harus dianalisis berikutnya adalah $x_1 = 7$ dan $x_2 = 1$.

Penyelesaian tahap ketiga : $x_1 = 7,\ x_2 = 1$

Berdasarkan $\left.\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\}$ maka menurut (I), (II), (III) dan (IV) :
$z = 190, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 2$ dan $s_3 = 0$

Karena penyertaan x_2 dalam analisis menyebabkan $s_1 = 0$, maka persamaan (II) yang mengandung s_1 perlu diubah ke dalam satuan x_2 untuk kemudian — bersama-sama dengan persamaan (IV) yang telah diubah menjadi (V) — disubstitusikan ke dalam fungsi tujuan yang asli, guna mengetahui kemungkinan perbaikan optimalitas lebih lanjut.

Menurut (II) : $3x_1 + 3x_2 + s_1 = 24$

$$3x_2 = 24 - 3x_1 - s_1 \rightarrow x_2 = 8 - x_1 - \frac{1}{3} s_1 \qquad \text{(VII)}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan (V) dan (VII) ke dalam fungsi tujuan yang asli (I), diperoleh sebuah fungsi tujuan yang baru lagi.

$$z = 25x_1 + 15x_2 \qquad \text{(I)}$$

$$= 25\left(7 - \frac{1}{3} s_3\right) + 15\left(8 - x_1 - \frac{1}{3} s_1\right)$$

$$= 175 - \frac{25}{3} s_3 + 120 - 15x_1 - 5s_1$$

$$= 295 - 5s_1 - \frac{25}{3} s_3 - 15\left(7 - \frac{1}{3} s_3\right)$$

$$= 295 - 5s_1 - \frac{25}{3} s_3 - 105 + 5s_3$$

$$\rightarrow z = 190 - 5s_1 - \frac{10}{3} s_3 \qquad \text{(VIII)}$$

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
"UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA"
YOGYAKARTA

Di sini terlihat tidak ada lagi variabel positif x_1 dan x_2, berarti sudah tidak dimungkinkan lagi perbaikan optimalitas melalui penambahan x_1 dan x_2. Karena tidak terdapat lagi kemungkinan perbaikan optimalitas, berarti x_1 dan x_2 yang dicapai pada tahap ini sudah optimal. Jadi, optimalitas tercapai pada $x_1 = 7$ dan $x_2 = 1$, dengan $z = 190$.

Perhatikan kembali persamaan (VIII). Di situ terlihat s_1 dan s_3 berkoefisien negatif, berarti penambahan setiap unit s_1 atau s_3 akan mengurangi optimalitas. Ini mengisyaratkan bahwa kita harus mempertahankan $s_1 = 0$ dan $s_3 = 0$. Apabila $x_1 = 7$ dan $x_2 = 1$ tadi dimasukkan ke dalam persamaan-persamaan yang mengandung s_1 dan s_3 yakni (II) dan (IV), akan terbukti bahwa memang $s_1 = 0$ dan $s_3 = 0$. Selanjutnya, ketidakhadiran variabel s_2 (yang mencerminkan sisa masukan *L*) di dalam persamaan *z* optimal di atas menandakan bahwa pada tahap penyelesaian optimal ini $s_2 \neq 0$. Berarti terdapat sisa masukan

L yang tidak terpakai. Jika hasil $x_1 = 7$ dan $x_2 = 1$ dimasukkan ke dalam persamaan (III) yang mengandung s_2, terbukti bahwa $s_2 = 2$. Dengan perkataan lain, terdapat 2 unit L yang tidak terpakai pada tingkat produksi optimal ini.

Hasil-hasil perhitungan secara aljabar ini terbukti konsisten dengan hasil perhitungan secara grafik sebelumnya. Hasil-hasil inipun konsisten pula dengan hasil perhitungan secara simplex, yang akan ditemui di dalam sub-bab berikut.

Catatan tentang metoda aljabar

Secara teoretik, metoda aljabar lebih bermanfaat dibandingkan dengan metoda grafik, karena dapat digunakan untuk penyelesaian masalah dengan jumlah variabel keputusan berapapun. Sayangnya, rangkaian penyelesaiannya cukup panjang sehingga bisa membingungkan atau bahkan menjemukan. Untuk menyelesaikan masalah dengan dua variabel keputusan, jelas metoda grafik lebih praktis daripada metoda aljabar. Ketidakpraktisannya menyebabkan metoda ini kurang begitu populer. Oleh karenanya banyak buku-teks yang memuat materi programasi linear tidak mencantumkan metoda ini dalam bahasannya. Untuk menyelesaikan masalah dengan lebih dari dua variabel keputusan, orang lebih cenderung menggunakan metoda simplex karena lebih praktis. Akan tetapi patut dicatat bahwa metoda simplex sesungguhnya bersumber dari metoda ini, dan banyak paket programasi linear pada komputer justru diprogram berdasarkan prinsip-prinsip metoda aljabar, meskipun keluaran (*output*)-nya disajikan dalam bentuk tabulasi simplex.

14.5 METODA SIMPLEX *)

Metoda simplex dikerjakan secara sistematik bermula dari suatu penyelesaian dasar yang laik (*feasible basic solution*) ke penyelesaian dasar yang laik berikutnya. Hal ini dilakukan berulang-ulang (*iterative, algorithmic*) hingga akhirnya ditemukan penyelesaian yang optimal. Dalam pengerjaan secara simplex ini peranan matriks berikut kaidah-kaidahnya sangat berarti.

Seperti halnya dengan metoda aljabar, di sinipun terlebih dahulu harus dilakukan standarisasi rumusan model, sebelum tahap penyelesaian awal dikerjakan. Fungsi-fungsi kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan harus

---

*)Perkataan "simplex" merupakan akronim dari "simple linear example". Karena merupakan akronim, dalam buku ini kata "simplex" tetap dieja sebagaimana aslinya. Berbeda dengan "matrix" yang dieja-indonesiakan menjadi "matriks", sebab "matrix" merupakan kata dasar asli.

2. Kolom z

Kolom ini sebenarnya hanya berfungsi sebagai "pelengkap" isinya selalu sama (1, 0, 0, ..., 0) sejak penyelesaian awal hingga penyelesaian akhir, karenanya boleh tidak dicantumkan di dalam tablo.

3. Kolom-kolom Variabel

Kolom ini berisi koefisien-koefisien dari masing-masing variabel dalam persamaan yang bersesuaian; yakni a_{ij} untuk variabel-variabel asli x_j dan 0 atau 1 untuk variabel-variabel semu s_j, untuk tablo pertama (penyelesaian awal).

4. Kolom S

Kolom S ("solution") ini berisi nilai-niai ruas kanan dari persamaan-persamaan implisit yang terdapat di dalam model, baik persamaan fungsi tujuan maupun persamaan-persamaan fungsi kendala. Angka-angka yang tercantum di kolom S ini mencerminkan nilai z dan nilai-nilai variabel dasar pada tahap penyelesaian yang bersangkutan.

Langkah-langkah Pengerjaan

Langkah-langkah pengerjaan programasi linear secara simplex dengan tablo berkolom variabel dasar adalah sebagai berikut :

1. Rumuskan dan standarisasikan modelnya.
2. Bentuk tablo pertama dengan menetapkan semua variabel semu sebagai variabel dasar (semua variabel asli sebagai variabel adasar).
3. Tentukan satu "variabel pendatang" (*entering variable*) di antara variabel-variabel adasar yang ada, untuk dijadikan variabel dasar dalam tablo berikutnya. Variabel pendatang ialah variabel adasar yang nilainya pada baris-z paling negatif dalam kasus maksimisasi, atau paling positif dalam kasus minimisasi.
4. Tentukan satu "variabel perantau" (*leaving variable*) di antara variabel-variabel dasar yang ada, untuk menjadi variabel adasar dalam tablo berikutnya. Variabel perantau ialah variabel dasar yang memiliki "rasio solusi" dengan nilai positif terkecil.

Kolom yang mengandung variabel pendatang dinamakan kolom kunci, sedangkan baris yang mengandung variabel perantau dinamakan baris kunci. Unsur di dalam tablo yang merupakan perpotongan antara baris kunci dan kolom kunci dinamakan unsur kunci. Rasio solusi adalah hasilbagi konstanta pada kolom S terhadap unsur sebaris pada kolom kunci. Dalam menentukan variabel perantau atau baris kunci, abaikan rasio solusi yang bernilai nol dan negatif, baik untuk kasus maksimisasi maupun minimisasi.

5. Bentuk tablo berikutnya dengan memasukkan variabel pendatang ke kolom VD dan mengeluarkan variabel perantau dari kolom VD, serta lakukan transformasi baris-baris tablo, termasuk baris-z.

   Transformasi baris kunci, yang sekarang bervariabel dasar baru, dilakukan sebagai berikut :

   baris kunci baru = baris kunci lama : unsur kunci

   Sedangkan transformasi baris-baris lainnya :

   baris baru = baris lama — (unsur pada kolom kuncinya × baris kunci baru)

6. Lakukan pengujian optimalitas. Jika semua koefisien variabel adasar pada baris-z sudah tidak ada lagi yang negatif (untuk kasus maksimisasi; atau sudah tidak ada lagi yang positif, untuk kasus minimisasi), berarti penyelesaian sudah optimal, tidak perlu dibentuk tablo selanjutnya. Jika masih, berarti penyelesaian belum optimal, ulangi lagi langkah ke-3 sampai ke-6 !

Kasus 83 Belajar ini

Sekarang, marilah kita coba metoda ini untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi oleh PT "Double-X", yakni :

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Maksimumkan } z = 25x_1 + 15x_2 & \\
\text{terhadap} & 3x_1 + 3x_2 \leq 24 \ \ldots\ldots\ldots & \text{(kendala masukan } K) \\
 & 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \ \ldots\ldots\ldots & \text{(kendala masukan } L) \\
 & 3x_1 \qquad\quad \leq 21 \ \ldots\ldots\ldots & \text{(kendala masukan } M) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

Model standarnya :

$$\begin{array}{ll}
\text{Maksimumkan} & z - 25x_1 - 15x_2 = 0 \\
\text{terhadap} & 3x_1 + 3x_2 + s_1 = 24 \\
 & 2x_1 + 4x_2 + s_2 = 20 \\
 & 3x_1 + s_3 = 21 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}$$

Model yang sudah standar ini bisa langsung diterjemahkan menjadi tablo pertama, dengan menempatkan variabel-variabel semu (dalam hal ini variabel senjang atau *slack variable*) s_1 dan s_2 serta s_3 sebagai variabel-variabel dasar.

Tablo I.

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	S	
z	1	-25	-15	0	0	0	0	persamaan — z
s_1	0	3	3	1	0	0	24	persamaan — s_1
s_2	0	2	4	0	1	0	20	persamaan — s_2
s_3	0	3	0	0	0	1	21	persamaan — s_3

Pada tahap ini x_1 dan x_2 merupakan variabel-variabel adasar, sebab tidak tercantum pada kolom VD. Langkah kita yang berikut ialah menentukan variabel pendatang dan variabel perantau, agar dapat membentuk tablo berikutnya. Dalam kasus (maksimisasi) ini, variabel pendatangnya adalah x_1 karena nilainya pada baris — z paling negatif. Konsekuensinya, kolom x_1 merupakan kolom kunci. Dari sini bisa dihitung rasio solusi untuk masing-masing variabel dasar. Rasio solusi untuk s_1 adalah $24/3 = 8$, untuk s_2 adalah $20/2 = 10$, sedangkan untuk s_3 adalah $21/3 = 7$. Karena rasio solusinya paling kecil maka s_3 merupakan variabel perantau dan, konsekuensinya, barisnya merupakan baris kunci. Dengan dapat ditentukannya baris kunci dan kolom kunci, maka unsur kunci bisa ditetapkan. Jadi,

pendatang

Tablo I paling negatif (diulangi)

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	S	
z	1	-25	-15	0	0	0	0	
s_1	0	3	3	1	0	0	24	r.s. = 8
s_2	0	2	4	0	1	0	20	r.s. = 10
s_3	0	3	0	0	0	1	21	r.s. = 7 terkecil

perantau unsur kunci

Transformasi baris kunci (x_1 menggantikan s_3).

x_1 0/3 3/3 0/3 0/3 0/3 1/3 21/3

x_1	0	1	0	0	0	1/3	7

Transformasi baris-z

$1 - (-25)\ 0 = 1$
$-25 - (-25)\ 1 = 0$
$-15 - (-25)\ 0 = -15$
$0 - (-25)\ 0 = 0$
$0 - (-25)\ 0 = 0$
$0 - (-25)\ (1/3) = 25/3$
$0 - (-25)\ 7 = 175$

Transformasi baris-s_1

$0 - (3)\ 0 = 0$
$3 - (3)\ 1 = 0$
$3 - (3)\ 0 = 3$
$1 - (3)\ 0 = 1$
$0 - (3)\ 0 = 0$
$0 - (3)\ (1/3) = -1$
$24 - (3)\ 7 = 3$

Transformasi baris-s_2

$0 - (2)\ 0 = 0$
$2 - (2)\ 1 = 0$
$4 - (2)\ 0 = 4$
$0 - (2)\ 0 = 0$
$1 - (2)\ 0 = 1$
$0 - (2)\ (1/3) = -2/3$
$20 - (2)\ 7 = 6$

Tablo II.

unsur kunci

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	S	
z	1	0	-15	0	0	25/3	175	
s_1	0	0	3	1	0	-1	3	r.s. = 1
s_2	0	0	4	0	1	-2/3	6	r.s. = 1,5
x_1	0	1	0	0	0	1/3	7	r.s. = ∞

Sekarang variabel-variabel adasarnya ialah x_2 dan s_3. Karena di antara variabel-variabel adasar ini masih ada yang koefisien pada baris-z-nya bernilai negatif (ingat kasusnya adalah maksimisasi), berarti penyelesaian belum optimal. Harus dibentuk tablo berikutnya. Sebagaimana dapat dilihat di dalam Tablo II di atas, x_2 merupakan variabel pendatang dan s_1 merupakan variabel perantau; kolom dan baris yang bersangkutan merupakan kolom kunci dan baris kunci, dengan unsur kunci bernilai 3. Sekali lagi, sebelum tablo dibentuk terlebih dahulu harus dilakukan transformasi baris. Dalam hal ini transformasi baris-barisnya adalah sebagai berikut.

Transformasi baris kunci (x_2 menggantikan s_1) :

x_2 0/3 0/3 3/3 1/3 0/3 -1/3 3/3

x_2	0	0	1	1/3	0	-1/3	1

Transformasi baris-z	Transformasi baris-s_2	Transformasi baris-x_1
1 — (-15) 0 = 1	0 — (4) 0 = 0	0 — (0) 0 = 0
0 — (-15) 0 = 0	0 — (4) 0 = 0	1 — (0) 0 = 1
-15 — (-15) 1 = 0	4 — (4) 1 = 0	0 — (0) 1 = 0
0 — (-15) 1/3 = 5	0 — (4) 1/3 = -4/3	0 — (0) 1/3 = 0
0 — (-15) 0 = 0	1 — (4) 0 = 1	0 — (0) 0 = 0
25/3 — (-15) (-1/3) = 10/3	-2/3 — (4) (-1/3) = 2/3	1/3 — (0) (-1/3) = 1/3
175 — (-15) 1 = 190	6 — (4) 1 = 2	7 — (0) 1 = 7

Tablo III.

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	S
z	1	0	0	5	0	10/3	190
x_2	0	0	1	1/3	0	-1/3	1
s_2	0	0	0	-4/3	1	2/3	2
x_1	0	1	0	0	0	1/3	7

Variabel-varibel dasarnya sekarang (lihat kolom VD) adalah x_1, x_2 dan s_2. Sedangkan variabel-variabel adasarnya ialah s_1 dari s_3. Karena koefisien-koefisien variabel adasar pada baris-z sudah tidak ada lagi yang negatif, berarti optimalitas sudah dicapai pada tahap penyelesaian ketiga ini. Tablo III yang merupakan tablo terakhir disebut tablo optimal.

Penafsiran Tablo Optimal

gak usah dibaca

Kesimpulan yang dihasilkan pada penyelesaian tahap terakhir dapat dibaca langsung dari tablo optimal. Baris-baris yang bersesuaian pada kolom VD dan kolom S menunjukkan $z = 190$, $x_2 = 1$, $s_2 = 2$ dan $x_1 = 7$. Berarti optimalitas dicapai pada kombinasi produksi 7 unit X_1 dan 1 unit X_2, dengan profit maksimum 190; dan terdapat sisa masukan L yang tidak terpakai (dilambangkan oleh s_2, variabel senjang pada fungsi kendala L) sebanyak 2 unit. Dalam tablo optimal ini s_1 dan s_3 tidak tercantum di kolom VD, mencerminkan bahwa pada penyelesaian optimal semua masukan yang dilambangkan-nya (yaitu K dan M) terpakai habis, tidak ada yang tersisa. Hasil-hasil ini konsisten dengan hasil-hasil yang diperoleh melalui metoda grafik dan metoda aljabar sebelumnya.

Variabel semua yang tidak tercantum di kolom VD dalam tablo optimal mengandung arti bahwa masukan yang diwakilinya merupakan "sumberdaya langka" (*scarce resource*). Dalam kasus ini masukan-masukan K dan M merupakan sumberdaya langka, mengingat s_1 dan s_3 tidak tercantum di kolom VD. Sedangkan variabel semu yang tercantum di kolom VD, dan nilainya di kolom S bukan nol, mengandung arti bahwa masukan yang diwakili nya merupakan "sumberdaya berlebih" (*abundant resource*). Dalam kasus ini sumberdaya yang berlebih ialah masukan L, mengingat s_2 tercantum di kolom VD dan nilainya di kolom S tidak sama dengan nol. (Ingat bahwa semua masukan K dan M terpakai habis, sedangkan masukan L ada yang tersisa).

Penafsiran lain lagi yang dapat dilakukan melalui tablo optimal ialah mengenai nilai dual (*dual value*). Koefisien kolom variabel semu pada baris z mencerminkan nilai dual dari kendala yang diwakilinya. Dalam kasus ini koefisien kolom-kolom s_1, s_2 dan s_3 pada baris $-z$ masing-masing 5, 0 dan 10/3. Berarti nilai dual kendala pertama (masukan K), kendala kedua (masukan L) dan kendala ketiga (masukan M) masing-masing adalah 5, 0 dan 10/3.

14.5.2 Simplex dengan Tablo Berbaris $c_j - z_j$

Berbeda dengan metoda simplex yang menggunakan model tablo berkolom variabel dasar, metoda simplex dengan tablo jenis ini tidak memerlukan peng-implisit-an persamaan fungsi tujuan. Secara umum, rumusan model yang standar untuk metoda simplex dengan tablo berbaris $c_j - z_j$ adalah :

Optimumkan $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$

terhadap

$$
\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n & \pm s_1 & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n & & \pm s_2 & & = b_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & & & \pm s_m & = b_m
\end{array}
$$

Bentuk tablonya :

Program	Tujuan	c_1	c_2	.....	c_n	0	0	.....	0	Kuantitas
		x_1	x_2	.....	x_n	s_1	s_2	.....	s_n	
s_1	0	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	1	0	.....	0	b_1
s_2	0	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	0	1	.....	0	b_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
s_n	0	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mn}	0	0	.....	1	b_m
	z_j									
	$c_j - z_j$									
		matriks utama $\mathbf{A}_{m \times n}$				matriks satuan $\mathbf{I}_{n \times n}$				

Keterangan :

1. Kolom Program

Kolom ini berisi variabel-variabel s_j dan/atau x_j ($j = 1, 2, \ldots\ldots, n$) yang menentukan kesimpulan penyelesaian. Pada penyelesaian tahap awal atau dalam tablo pertama, kolom ini berisi semua variabel semu. Pada tahap-tahap berikutnya akan terjadi pergantian variabel-variabel yang mengisi kolom ini, tergantung pada kesimpulan analisis penyelesaiannya. [Kolom Program dalam tablo model ini identik dengan Kolom VD dalam tablo model sebelumnya].

2. Kolom Tujuan

Kolom ini berisi koefisien variabel-variabel di dalam fungsi tujuan, sesuai dengan yang tercantum di kolom Program. Pada penyelesaian awal, karena kolom Program berisi variabel-variabel semu — padahal koefisien-koefisien variabel semu di dalam fungsi tujuan adalah 0 — maka kolom ini berisi bilangan-bilangan nol.

3. Kolom-kolom Variabel

Kolom-kolom ini berisi koefisien-koefisien dari setiap variabel yang terdapat di dalam model. Koefisien-koefisien yang terdapat di dalam fungsi tujuan (yaitu c_1 sampai c_n untuk x_1 sampai x_n , dan 0 untuk semua s_j) diletakkan di sebelah atas. Sedangkan koefisien-koefisien yang terdapat di dalam fungsi-fungsi kendala (yaitu a_{ij} untuk x_j, dan 0 atau 1 untuk s_j) diletakkan di sebelah bawah. Dalam tablo pertama, kolom-kolom variabel asli x_j membentuk matriks $\mathbf{A}_{m \times n}$, sedangkan kolom-kolom variabel semu s_j membentuk matriks satuan $\mathbf{I}_{n \times n}$.

4. Kolom Kuantitas

Kolom ini mencerminkan kuantitas masing-masing variabel yang tercantum di kolom Program pada tahap penyelesaian yang bersangkutan. Pada penyelesaian tahap pertama karena $x_j = 0$ (untuk setiap j), kolom ini berisi konstanta-konstanta b_i ($i = 1, 2, \ldots\ldots, m$) yang terdapat di ruas kanan persamaan-persamaan kendala. [Kolom Kuantitas dalam tablo model ini identik dengan Kolom S dalam tablo model sebelumnya].

5. Baris-z_j

Baris ini berisi jumlah hasilkali unsur-unsur pada kolom tujuan dengan unsur-unsur pada kolom yang bersesuaian.

6. Baris $c_j - z_j$

Baris ini merupakan indikator optimalitas penyelesaian, berisi selisih antara c_j dan z_j. Untuk masalah maksimisasi, penyelesaian dinyatakan optimal jika sudah tidak ada lagi unsur bertanda positif pada baris $c_j - z_j$ ini. Untuk masalah minimisasi, penyelesaian dinyatakan optimal apabila sudah tidak terdapat lagi unsur bertanda negatif pada baris ini. [Bandingkan dengan indikator optimalitas dalam metoda simplex yang menggunakan model tablo berkolom variabel dasar !].

Langkah-langkah Pengerjaan

Langkah-langkah pengerjaan programasi linear secara simplex dengan tablo berbaris $c_j - z_j$ adalah sebagai berikut :

1. Rumuskan dan standarisasikan modelnya.
2. Bentuk tablo pertama berdasarkan keterangan-keterangan di atas.
3. Tentukan kolom kunci di antara kolom-kolom variabel yang ada, yaitu kolom yang mengandung nilai ($c_j - z_j$) paling positif untuk kasus maksimisasi, atau mengandung nilai ($c_j - z_j$) paling negatif jika kasusnya minimisasi.

4. Tentukan baris kunci di antara baris-baris variabel yang ada, yaitu baris yang memiliki "rasio kuantitas" dengan nilai positif terkecil, baik untuk masalah maksimisasi maupun minimisasi.

   Variabel yang terdapat pada kolom kunci dinamakan variabel pendatang, sedangkan variabel yang terdapat pada baris kunci dinamakan variabel perantau. Variabel pendatang akan menggantikan variabel perantau dalam tablo berikutnya. Unsur di dalam tablo yang merupakan perpotongan antara baris kunci dan kolom kunci dinamakan unsur kunci. Rasio kuantitas adalah hasilbagi konstanta pada kolom Kuantitas terhadap unsur sebaris pada kolom kunci. Dalam menentukan baris kunci atau variabel perantau, abaikan rasio kuantitas yang bernilai nol dan negatif.

5. Bentuk tablo berikutnya dengan memasukkan variabel pendatang ke kolom Program dan mengeluarkan variabel perantau dari kolom tersebut, serta lakukan transformasi baris-baris variabel.

   Transformasi baris kunci, yang sekarang bervariabel baru, dilakukan sebagai berikut :

   baris kunci baru = baris kunci lama : unsur kunci

   Sedangkan transformasi baris-baris lainnya :

   baris baru = baris lama — (rasio kunci × baris kunci lama)

   Rasio kunci adalah unsur pada kolom kunci dibagi unsur kunci. [Hati-hati terhadap istilah "unsur pada kolom kunci" dan "unsur kunci", keduanya berbeda !].

6. Lakukan pengujian optimalitas. Jika semua koefisien pada baris $c_j - z_j$ sudah tidak ada lagi yang positif (untuk kasus maksimisasi) atau sudah tidak ada lagi yang negatif (untuk kasus minimisasi), berarti penyelesaian sudah optimal. Jika masih, berarti penyelesaian belum optimal, lakukan lagi langkah ke-3 sampai dengan ke-6 !

Kasus 84

Masalah PT "Double-X" di depan sekarang diselesaikan secara simplex menggunakan tablo berbaris $c_j - z_j$.

Model standarnya :

Maksimumkan $z = 25x_1 + 15x_2$

terhadap

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + s_1 \quad &= 24 \text{ (masukan } K) \\ 2x_1 + 4x_2 \quad + s_2 &= 20 \text{ (masukan } L) \\ 3x_1 \quad\quad + s_3 &= 21 \text{ (masukan } M) \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0$$

Tablo I

Program	Tujuan	25	15	0	0	0	Kuantitas	
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	0	3	3	1	0	0	24	r.ks. = 8
s_2	0	2	4	0	1	0	20	r.ks. = 10
s_3	0	3	0	0	0	1	21	r.ks. = 7
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	25	15	0	0	0		

Kolom-x_1 merupakan kolom kunci karena nilai positif $(c_j - z_j)$-nya terbesar. Bersamaan dengan ini x_1 merupakan variabel pendatang. Baris-s_3 merupakan baris kunci karena rasio kuantitasnya terkecil, 21/3 = 7. Selanjutnya dapat dilihat, unsur kuncinya ialah 3. Dari sini dapat dihitung bahwa rasio kunci untuk baris-s_1 adalah 3/3 = 1, sedangkan rasio kunci untuk baris-s_2 adalah 2/3. Rasio kunci untuk baris-s_3 tak perlu dihitung karena merupakan baris kunci. Dalam tablo kedua, variabel pendatang x_1 masuk ke kolom Program menggantikan variabel perantau s_3.

Transformasi baris kunci	Transformasi baris-s_1	Transformasi baris-s_2
3 : 3 = 1	3 — (1) 3 = 0	2 — (2/2) 3 = 0
0 : 3 = 0	3 — (1) 0 = 3	4 — (2/3) 0 = 4
0 : 3 = 0	1 — (1) 0 = 1	0 — (2/3) 0 = 0
0 : 3 = 0	0 — (1) 0 = 0	1 — (2/3) 0 = 1
1 : 3 = 1/3	0 — (1) 1 = -1	0 — (2/3) 1 = -2/3
21 : 3 = 7	24 — (1) 21 = 3	20 — (2/3) 21 = 6

Sehingga tablo keduanya adalah (angka 25 pada kolom tujuan merupakan koefisien variabel x_1 dalam fungsi tujuan) :

Tablo II

Pro-gram	Tujuan	25	15	0	0	0	Kuan-titas	
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	0	0	3	1	0	-1	3	r.k. = 1
s_2	0	0	4	0	1	-2/3	6	r.ks. = 1,5
x_1	25	1	0	0	0	1/3	7	r.ks. = ∞
	z_j	23	0	0	0	25/3	175	
	$c_j - z_j$	0	15	0	0	-25/3		

Karena pada baris $c_j - z_j$ masih terdapat unsur positif (ingat : masalahnya di sini maksimisasi), berarti penyelesaian belum optimal. Kolom kuncinya sekarang adalah kolom — x_2 dan variabel x_2 merupakan variabel pendatang. Adapun baris kuncinya ialah baris — s_1 dan variabel s_1 merupakan variabel perantau. Berarti dalam tablo berikutnya x_2 menggantikan s_1 di kolom Program. Unsur kuncinya 3. Sedangkan rasio kunci untuk baris — s_2 dan baris — x_1 masing-masing adalah 4/3 dan 0.

Transformasi baris kunci	Transformasi baris — s_2	Transformasi baris — x_1
0 : 3 = 0	0 — (4/3) 0 = 0	1 — (0) 0 = 1
3 : 3 = 1	4 — (4/3) 3 = 0	0 — (0) 3 = 0
1 : 3 = 1/3	0 — (4/3) 1 = -4/3	0 — (0) 1 = 0
0 : 3 = 0	1 — (4/3) 0 = 1	0 — (0) 0 = 0
-1 : 3 = -1/3	-2/3 — (4/3) (-1) = 2/3	1/3 — (0) (-1) = 1/3
3 : 3 = 1	2 — (4/3) 3 = 2	7 — (0) 3 = 7

[Perhatian : Dalam mentransformasikan baris, unsur pada kolom tujuan tidak turut ditransformasikan !].

Tablo III

Program	Tujuan	25	15	0	0	0	Kuantitas
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	15	0	1	1/3	0	-1/3	1
s_2	0	0	0	-4/3	1	2/3	2
x_1	25	1	0	0	0	1/3	7
	z_j	25	15	5	0	10/3	190
	$c_j - z_j$	0	0	-5	0	-10/3	

Pada penyelesaian tahap ketiga ini terlihat tidak terdapat lagi unsur positif pada baris $c_j - z_j$. Berarti penyelesaian sudah optimal, Tablo III merupakan tablo optimal. Dengan membaca tablo terakhir ini dapat disimpulkan, bahwa optimalitas tercapai pada kombinasi produksi 7 unit X_1 dan 1 unit X_2 dengan profit maksimum 190, dan tersisa 2 unit masukan L ($s_2 = 2$). Koefisien baris $- z_j$ pada kolom-kolom variabel semu mencerminkan nilai dual (*dual value*) dari variabel semu yang bersangkutan. Dalam hal ini nilai dual untuk variabel-variabel s_1, s_2 dan s_3 masing-masing adalah 5, 0 dan 10/3.

Penyelesaian secara simplex dengan model tablo berbaris $c_j - z_j$ ini terbukti tidak berbeda dengan model tablo berkolom variabel dasar. Dengan demikian tablo model yang manapun yang kita gunakan untuk menyelesaikan masalah programasi linear secara simplex, akan membuahkan hasil dan kesimpulan serupa.

14.6 VARIABEL BUATAN DAN MASALAH MINIMISASI

belajar ini

Dalam membahas metoda simplex, sejauh ini kita baru bekerja dengan contoh-contoh kasus maksimisasi. Penyelesaian masalah minimisasi dengan metoda simplex relatif lebih canggih (*sophisticated*) daripada penyelesaian masalah maksimisasi. Sebab di samping menyertakan variabel semu, dalam masalah minimisasi pada umumnya disertakan pula satu jenis variabel lain lagi yang disebut variabel buatan. Variabel buatan (*artificial variable*) ialah suatu variabel pelengkap yang ditambahkan ke dalam fungsi kendala yang bertanda $\geqslant$ dan bertanda $=$. Tujuan penggunaan variabel ini dalam programasi linear, khususnya dalam masalah minimisasi, adalah untuk merasionalkan proses penyelesaian. Variabel buatan ini juga perlu disertakan di dalam masalah maksimisasi apabila di antara fungsi-fungsi kendalanya terdapat kendala bertanda $\geqslant$ dan/atau bertanda $=$.

Jadi, standarisasi untuk kendala (misalnya) : $3x_1 + 4x_2 \geq 72$ adalah : $3x_1 + 4x_2 - s + r = 72$ di mana s adalah variabel semu (dalam hal ini variabel surplus) dan r adalah variabel buatan.

Kehadiran variabel buatan di dalam fungsi kendala menyebabkan pula kehadirannya di dalam fungsi tujuan. Mengingat variabel ini sebenarnya berfungsi hanya sebagai pelengkap, maka untuk menetralisasi pengaruhnya dalam pengambilan keputusan dipasang "koefisien pengganjar" terhadapnya di dalam fungsi tujuan. Koefisien pengganjar (biasanya, dan juga dalam buku ini, dilambangkan dengan M) adalah suatu bilangan sangat besar yang berfungsi untuk menetralisasi pengaruh variabel buatan di dalam fungsi tujuan.

Jadi, jika misalnya harus diminimumkan $z = 10x_1 + 12x_2$ dan salah satu kendalanya adalah $3x_1 + 4x_2 \geq 72$, maka standarisasi untuk kendala ini adalah $3x_1 + 4x_2 - s + r = 72$ dan standarisasi untuk fungsi tujuannya adalah :

$$z = 10x_1 + 12x_2 + Mr$$
$$z = 10x_1 + 12x_2 + M(72 - 3x_1 - 4x_2 + s)$$
$$z = 10x_1 + 12x_2 + 72M - 3Mx_1 - 4Mx_2 + Ms$$
$$z - 10x_1 - 12x_2 + 3Mx_1 + 4Mx_2 - Ms = 72M.$$

Jika kasusnya maksimisasi, standarisasi fungsi tujuannya adalah :

$$z = 10x_1 + 12x_2 - Mr$$
$$z = 10x_1 + 12x_2 - M(72 - 3x_1 - 4x_2 + s)$$
$$z - 10x_1 - 12x_2 - 3Mx_1 - 4Mx_2 + Ms = -72M.$$

Berdasarkan gambaran di atas terlihat betapa kritisnya langkah standarisasi model dalam penyelesaian masalah yang mengandung penyertaan variabel buatan. Keadaan inilah yang sering dijumpai dalam kasus minimisasi. Untuk memperoleh gambaran yang lebih utuh tentang penyelesaian masalah minimisasi dengan metoda simplex, perhatikan contoh kasus berikut.

Kasus 85

$$\begin{aligned}
\text{Minimumkan } z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{terhadap} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 50 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 40 \\
& 5x_1 + 4x_2 \geq 170
\end{aligned}$$
$x_1, x_2 \geq 0$.

Karena semua kendala bertanda $\geq$, maka masing-masing harus dikurangi dengan variabel surplus s_i dan ditambah dengan variabel buatan r_i, sehingga standarisasi kendala-kendalanya adalah :

Dumaria

$$
\begin{array}{lll}
2x_1 + x_2 - s_1 + r_1 = 50 & \text{atau} & r_1 = 50 - 2x_1 - x_2 + s_1 \\
x_1 + 2x_2 - s_2 + r_2 = 40 & \text{atau} & r_2 = 40 - x_1 - 2x_2 + s_2, \\
5x_1 + 4x_2 - s_3 + r_3 = 170 & \text{atau} & r_3 = 170 - 5x_1 - 4x_2 + s_3
\end{array}
$$

Sedangkan standarisasi fungsi tujuannya :

tujuan

$$
\begin{aligned}
z &= 4x_1 + 3x_2 + Mr_1 + Mr_2 + Mr_3 \\
&= 4x_1 + 3x_2 + M(50 - 2x_1 - x_2 + s_1) + M(40 - x_1 - 2x_2 + s_2) + \\
&\quad M(170 - 5x_1 - 4x_2 + s_3) \\
&= 4x_1 + 3x_2 + 50M - 2Mx_1 - Mx_2 + Ms_1 + 40M - Mx_1 - 2Mx_2 \\
&\quad + Ms_2 + 170M - 5Mx_1 - 4Mx_2 + Ms_3 \\
&= 4x_1 - 8Mx_1 + 3x_2 - 7Mx_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 260M \\
&= (4 - 8M)x_1 + (3 - 7M)x_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 260M.
\end{aligned}
$$

Andaikan kita akan menggunakan model tablo berkolom variabel dasar (bukan tablo berbaris $c_j - z_j$), berarti persamaan tujuan ini harus diimplisitkan dulu menjadi :

$$z - (4 - 8M)x_1 - (3 - 7M)x_2 - Ms_1 - Ms_2 - Ms_3 = 260M$$

Dengan demikian, rumusan modelnya setelah distandarisasikan selengkapnya adalah sebagai berikut :

Minimumkan $z - (4 - 8M)x_1 - (3 - 7M)x_2 - Ms_1 - Ms_2 - Ms_3 = 260M$

terhadap

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + x_2 - s_1 + r_1 = 50 \\
x_1 + 2x_2 - s_2 + r_2 = 40 \\
5x_1 + 4x_2 - s_3 + r_3 = 170 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3 \geq 0
\end{array}
$$

Dengan model yang sudah standar ini tablo pertama bisa langsung dibentuk. Guna menentukan variabel-variabel mana yang masuk ke dalam kolom VD (kolom Variabel Dasar) pada tablo pertama, perhatikan letak susunan persamaan-persamaan kendalanya. Matriks satuan dibentuk oleh koefisien-koefisien variabel buatan r_1, r_2 dan r_3. Berarti variabel-variabel inilah yang merupakan variabel dasar dalam tablo pertama.

Harus openbook ! maunya !

Tablo I

kolom kunci

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3	S	rasio solusi
z	1	$-4 + 8M$	$-3 + 7M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$-260\ M$	
r_1	0	2	1	-1	0	0	1	0	0	50	baris kunci 25
r_2	0	1	2	0	-1	0	0	1	0	40	40
r_3	0	5	4	0	0	-1	0	0	1	170	34

cari positif yg paling gede.

Langkah-langkah berikutnya adalah seperti yang sudah digariskan sebelumnya : menentukan variabel pendatang (kolom kunci), variabel perantau (baris kunci), unsur kunci, mentransformasikan baris-baris, membentuk tablo baru dan menguji optimalitasnya. Perlu dicatat di sini bahwa masalahnya adalah masalah minimisasi, sehingga variabel pendatangnya adalah variabel adasar yang nilainya pada baris — z paling positif. Indikator optimalitasnya ialah jika semua koefisien variabel adasar pada baris — z sudah tidak ada lagi yang positif.

Untuk tablo pertama ini variabel pendatangnya adalah x_1 (ingat M adalah bilangan yang sangat besar). Variabel perantaunya r_1 karena rasio solusinya, $50/2 = 25$, paling kecil. Unsur kuncinya 2. Berarti dalam Tablo II x_1 masuk ke kolom VD menggantikan r_1. Hasil transformasi baris kunci, yakni baris kunci lama dibagi unsur kunci, adalah :

x_1	0	1	½	-½	0	0	½	0	0	25

Transformasi baris-baris lainnya :

baris baru = baris lama — (unsur pada kolom kuncinya × baris kunci baru).

Transformasi bariz -z

$-4 + 8M — (-4 + 8M)\ 1 = 0$

$-3 + 7M — (-4 + 8M)\ (1/2) = -1 + 3M$

$— M — (-4 + 8M)\ (-1/2) = -2 + 3M$

$— M — (-4 + 8M)\ 0 = -M$

Transformasi baris -r_2

$1 — (1)\ 1 = 0$

$2 — (1)\ (1/2) = 3/2$

$0 — (1)\ (-1/2) = 1/2$

$-1 — (1)\ 0 = -1$

$-M-(-4+8M)\,0$	$=-M$	$0-(1)\,0$	$=0$
$0-(-4+8M)\,(1/2)$	$=2-4M$	$0-(1)\,(1/2)$	$=-1/2$
$0\,(-4+8M)\,0$	$=0$	$1-(1)\,0$	$=1$
$0\,(-4+8M)\,0$	$=0$	$0-(1)\,0$	$=0$
$260M-(-4+8M)\,25$	$=100+60M$	$40-(1)\,25$	$=15$

Dengan cara serupa, hasil transformasi baris $-r_3$ adalah :

r	0	0	3/2	5/2	0	-1	-5/2	0	1	45

Dengan demikian tablo keduanya adalah :

Tablo II

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3	S	*rasio solusi*
z	1	0	$-1+3M$	$-2+3M$	$-M$	$-M$	$2-4M$	0	0	$100+60M$	
x_1	0	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	0	0	25	50
r_2	0	0	3/2	1/2	-1	0	-1/2	1	0	15	10
r_3	0	0	3/2	5/2	0	-1	-5/2	0	1	45	30

Sampai dengan tahap kedua ini penyelesaian belum optimal, karena koefisien variabel adasar pada baris $-z$ masih ada yang bernilai positif (lihat x_2 dan s_1 !). Tablo-tablo selanjutnya berturut-turut adalah sebagai berikut.

Tablo III, IV dan V

VD	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3	S
z	1	0	0	$-5/3 + 2M$	$-2/3 + M$	$-M$	$5/3 - 3M$	$2/3 - 2M$	0	$110 + 30M$
x_1	0	1	0	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	0	20
x_2	0	0	1	1/3	-2/3	0	-1/3	2/3	0	10
r_3	0	0	0	2	1	-1	-2	-1	1	30
z	1	0	0	0	1/6	-5/6	$-M$	$-1/6 - M$	$5/6 - M$	135
x_1	0	1	0	0	2/3	-1/3	0	-2/3	1/3	30
x_2	0	0	1	0	-5/6	1/6	0	5/6	-1/6	5
s_1	0	0	0	1	1/2	-1/2	-1	-1/2	1/2	15
z	1	0	0	-1/3	0	-2/3	$1/3 - M$	$-M$	$2/3 - M$	130
x_1	0	1	0	-4/3	0	1/3	4/3	0	-1/3	10
x_2	0	0	1	5/3	0	-2/3	-5/3	0	2/3	30
s_2	0	0	0	2	1	-1	-2	-1	1	30

sudah tidak ada ~~negatif~~ positifny

Pada penyelesaian tahap kelima ini, variabel-variabel adasarnya — yaitu s_1, s_3, r_1, r_2 dan r_3 — sudah tidak ada lagi yang bernilai positif di baris-z. Berarti tahap ini merupakan penyelesaian tahap terakhir dan Tablo V merupakan tablo optimal. Posisi optimalitasnya ditunjukkan oleh $x_1 = 10$ dan $x_2 = 30$, dengan z minimum $= 130$.

$s_2 = 30$ dalam tablo optimal mencerminkan bahwa, dalam posisi optimalitas ini, sumberdaya (masukan) kedua yang digunakan 30 menit lebih banyak daripada ketentuan minimum. Ini bisa dibuktikan dengan mensubstitusikan $x_1 = 10$ dan $x_2 = 30$ ke dalam fungsi kendala kedua, yakni $x_1 + 2x_2 \geqslant 40$, $70 > 40$, $70 = 40 + 30$. Nilai dual (*dual value*) untuk masukan atau kendala pertama dan ketiga masing-masing adalah -1/3 dan -2/3.

Latihan Programasi Linear

1. Tentukan secara grafik area laik suatu masalah jika kendala-kendalanya ditunjukkan oleh :

$$
\begin{array}{ll}
2x_1 + 3x_2 \leqslant 18 & \text{(I)} \\
3x_1 + 3x_2 \leqslant 24 & \text{(II)} \\
2x_1 \geqslant 6 & \text{(III)} \\
2x_2 \geqslant 3 & \text{(IV)}
\end{array}
$$

2. (a) Maksimumkan $z = 3x_1 + 5x_2$
   terhadap $x_1 + 2x_2 \leqslant 10$ dan $3x_1 + x_2 \leqslant 10$.

   (b) Maksimumkan $z = 600a + 400b$
   terhadap $3000a + 1000b \leqslant 24.000$
   $1000a + 1000b \leqslant 16.000$
   $2000a + 6000b \leqslant 48.000$

   (c) Minimumkan $z = 600a + 400b$
   terhadap $3000a + 1000b \geqslant 24.000$
   $1000a + 1000b \geqslant 16.000$
   $2000a + 6000b \geqslant 48.000$

   (d) Minimumkan $z = 10x + 13y$
   terhadap $x + y \geqslant 6$
   $x + 2y \geqslant 8$
   $2x \geqslant 4$
   $y \geqslant 1$

3. Sebuah perusahaan kamera memproduksi tiga macam model kamera, masing-masing diproses melalui tiga departemen. Tipe Potret-1 dijual seharga Rp 40 ribu per unit, sedangkan tipe Potret-2 dan Potret-3 masing-masing dijual seharga Rp 50 ribu dan Rp 75 ribu per unit. Setiap lusin tipe Potret-1 membutuhkan 4 jam waktu pengolahan di Departemen A, 3 jam di Departemen B dan 1 jam di Departemen C. Sedangkan setiap lusin tipe Potret-2 memerlukan 2,5 jam, 4 jam dan 2 jam di masing-masing departemen. Untuk tipe Potret-3, setiap lusinnya membutuhkan 6 jam, 9 jam dan 4 jam di masing-masing Departemen. Kapasitas kerja maksimum Departemen-departemen A, B dan C masing-masing 130, 170 dan 52 jam per minggu. Guna menjamin kelangsungan bisnisnya, perusahaan menetapkan setidak-tidaknya harus diproduksi 25 unit tipe Potret-1, 100 unit tipe Potret-2 dan 48 unit tipe Potret-3 per minggu. Rumuskanlah model programasi linear untuk masalah yang dihadapi oleh perusahaan ini, dalam upaya mengoptimalkan penerimaan penjualannya per minggu !

4. Sebuah perusahaan menghasilkan dua macam barang, A dan B masing-masing diproses melalui dua mesin. Setiap unit barang A diproses selama 4 menit di Mesin I dan 2 menit di Mesin II, sedangkan tiap unit barang B diproses selama 2 menit di Mesin I dan 4 menit di Mesin II. Kapasitas

maksimum pengoperasian Mesin I 600 menit dan Mesin II 480 menit per hari. Setiap unit A dan B masing-masing memberikan marjin profit sebesar Rp 8 ribu dan Rp 6 ribu. Hitunglah kombinasi jumlah produk (*product mix*) yang memberikan profit maksimum per hari bagi perusahaan tersebut.

5. Firma "Rozat" Surabaya membuat dua macam kualitas roti dengan dua macam bahan mentah utama sebagai pembeda kualitas tersebut. Roti kualitas I, yang setiap unitnya mendatangkan keuntungan Rp 300,00, menggunakan 2 ons mentega dan 1 ons gula. Sedangkan roti kualitas II, yang mendatangkan keuntungan Rp 200,00 per unit, menggunakan 1 ons mentega dan 1 ons gula. Setiap harinya firma tersebut hanya mampu mendapatkan 50 kg mentega dan 30 kg gula. Berapa unit masing-masing jenis roti harus dibuat jika firma tadi menginginkan keuntungan hariannya maksimum, dan berapa keuntungan maksimum tersebut ?

6. Pabrik ban sepeda "Karet Deli" di Medan memproduksi ban luar dan ban dalam. Ban luar diproses melalui tiga unit mesin, sedangkan ban dalam diproses hanya di dua mesin. Setiap ban luar diproses secara berurutan selama 2 menit di Mesin I, 8 menit di Mesin II dan 10 menit di Mesin III. Sedangkan setiap ban dalam diproses selama 5 menit di Mesin I kemudian 4 menit di Mesin II. Sumbangan keuntungan dari setiap unit ban luar dan ban dalam masing-masing Rp 400,00 dan Rp 300,00. Kapasitas pengoperasian masing-masing mesin setiap harinya 800 menit. Jika setiap ban yang diproduksi senantiasa laku terjual, berapa unit masing-masing ban harus diproduksi setiap hari agar keuntungan "Karet Deli" maksimum ?

7. Perusahaan genteng "Sokajaya" di Kebumen menghasilkan tiga jenis genteng yaitu Prima, Utama dan Unggul. Masing-masing jenis diolah melalui tiga tahap kegiatan : pencetakan, pemadatan dan pengeringan. Data mengenai waktu pengolahan setiap jenis genteng di tiap tahap kegiatan (dalam menit), kapasitas kerja maksimum setiap unit kegiatan (menit per minggu), dan marjin keuntungan masing-masing jenis genteng (rupiah per unit) ditunjukkan oleh tabel berikut :

Jenis Genteng	Unit Pencetakan	Unit Pemadatan	Unit Pengeringan	Marjin Keuntungan
Prima	10,7	5,4	0,7	10
Utama	5	10	1	15
Unggul	2	4	2	20
Kapasitas	2705	2210	445	

Berapa unit masing-masing jenis genteng harus dihasilkan tiap minggu bila "Sokajaya" menginginkan usahanya optimal ?

8. Sebuah lembaga penelitian di Yogyakarta harus mengirimkan 10.000 kuesioner (daftar pertanyaan) kepada sasaran responden-respondennya di pulau Jawa, Sumatera dan Sulawesi. Biaya kirim seberkas kuesioner ke tiap responden adalah Rp 80,00 (Jawa, Rp 100,00 (Sumatera) dan Rp 110,00 (Sulawesi). Lembaga tersebut menetapkan tidak lebih dari 3000 kuesioner yang akan dikirimkan ke responden di pulau Jawa, serta setidak-tidaknya 1500 dan 2000 kuesioner harus dikirimkan masing-masing ke responden di pulau Sumatera dan pulau Sulawesi. Berapa berkas kuesioner harus dikirimkan ke masing-masing pulau agar biaya kirim totalnya minimum ?

9. Maksimumkan $z = 52x_1 + 80x_2 + 80x_3 + 80x_4 + 80x_5 + 102x_6 + 104x_7 + 104x_8 + 104x_9 + 104x_{10}$

terhadap
$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_7 \leqslant 550 \\
& x_3 + x_6 + x_8 \leqslant 150 \\
& x_4 + x_9 \leqslant 90 \\
& x_5 + x_{10} \leqslant 70 \\
& 0{,}5\,x_2 - 0{,}5\,x_3 - 0{,}5\,x_4 - 0{,}5\,x_5 \leqslant 0 \\
& -0{,}15\,x_2 + 0{,}85\,x_3 - 0{,}15\,x_4 - 0{,}15\,x_5 \geqslant 0 \\
& -0{,}1\,x_2 - 0{,}1\,x_3 + 0{,}9\,x_4 - 0{,}1\,x_5 \geqslant 0 \\
& -0{,}3\,x_7 + 0{,}7\,x_8 - 0{,}3\,x_9 - 0{,}3\,x_{10} \geqslant 0 \\
& -0{,}2\,x_7 - 0{,}2\,x_8 + 0{,}8\,x_9 - 0{,}2\,x_{10} \geqslant 0 \\
& -0{,}3\,x_7 - 0{,}3\,x_8 - 0{,}3\,x_9 + 0{,}7\,x_{10} \geqslant 0 \\
& x_i \geqslant 0. \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, 10
\end{aligned}$$

10. Minimumkan $z = 800\,x_1 + 400\,x_2 + 600\,x_3 + 500\,x_4$

terhadap
$$\begin{aligned}
& 10x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 \geqslant 5 \\
& 90x_1 + 150x_2 + 75x_3 + 175x_4 \geqslant 100 \\
& 45x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 37x_4 \geqslant 30 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

BAB 15
TEORI PERMAINAN

Teori permainan (*game theory*) dikembangkan untuk tujuan menganalisis situasi persaingan yang melibatkan berbagai kepentingan. Teori ini berangkat dari suatu keadaan di mana terdapat dua orang atau lebih dengan tujuan atau kepentingan yang saling berbeda terlibat dalam suatu "permainan", tindakan masing-masing pemain — walaupun tidak sepenuhnya menentukan — turut mempengaruhi hasil akhir dari permainan. Teori ini menyediakan cara penyelesaian untuk permainan semacam itu, dengan menganggap bahwa masing-masing pemain senantiasa berusaha "memaksimumkan keberuntungannya yang minimum" atau "meminimumkan ketidakberuntungannya yang maksimum". Kriteria semacam ini dikenal sebagai kriteria maksimin atau minimaks, merupakan dasar bagi teori strategi permainan yang dikembangkan oleh *John von Neumann* dan *Oskar Morganstern*, penerapannya di berbagai bidang kehidupan kemudian dikembangkan oleh para akhli statistik.

15.1 UNSUR-UNSUR DASAR TEORI PERMAINAN

Ada beberapa unsur atau konsep dasar yang sangat penting dalam penyelesaian setiap kasus dengan teori permainan. Mereka adalah (1) jumlah pemain, (2) ganjaran (*payoff*), (3) jumlah strategi permainan, (4) matriks permainan dan (5) titik pelana.

(1) Jumlah Pemain

Permainan diklasifikasikan menurut jumlah kepentingan atau tujuan yang ada dalam permainan tersebut. Dalam hal ini perlu difahami, bahwa pengertian "jumlah pemain" tidak selalu sama artinya dengan "jumlah orang" yang terlibat dalam permainan. Jumlah pemain di sini berarti jumlah kelompok pemain berdasarkan masing-masing kepentingan atau tujuannya. Dengan demikian dua orang atau lebih yang mempunyai kepentingan yang sama dapat diperhitungkan sebagai satu (kelompok) pemain.

Bentuk permainan yang sering dianalisis oleh teori permainan adalah bentuk permainan yang melibatkan dua kepentingan atau dua (kelompok) pemain. Bentuk permainan dengan dua pemain ini pulalah yang akan diuraikan di dalam buku ini. Bentuk permainan dengan lebih dari dua macam kepentingan atau lebih dari dua (kelompok) pemain tidak turut dibahas, karena proses penyelesaiannya relatif kompleks dan pelik.

(2) Ganjaran (*Payoff*)

Unsur lain yang juga penting dalam pengklasifikasian permainan adalah "ganjaran", yaitu hasil akhir yang terjadi pada akhir permainan. Berkenaan dengan ganjaran ini, permainan digolong-golongkan menjadi dua macam kategori, yaitu permainan jumlah-nol (*zero-sum games*) dan permainan jumlah-bukan-nol (*non-zero-sum-games*). Jika jumlah ganjaran dari seluruh pemain adalah nol, yakni dengan memperhitungkan setiap keberuntungan sebagai bilangan positif dan setiap ketidakberuntungan sebagai bilangan negatif, maka permainan demikian adalah permainan jumlah-nol; lain dari itu merupakan permainan jumlah-bukan-nol.

Dalam permainan jumlah-nol, setiap kemenangan bagi suatu pihak pemain merupakan kekalahan bagi pihak pemain lain. Letak arti penting dari pembedaan kedua kategori permainan berdasarkan ganjaran ini adalah, bahwa permainan jumlah-nol merupakan suatu sistem yang tertutup, sedangkan permainan jumlah-bukan-nol tidak demikian halnya. Hampir semua permainan pada dasarnya merupakan permainan jumlah-nol. Berbagai situasi dapat dianalisis sebagai permainan jumlah-nol. Kebanyakan telaah teori permainan berkaitan dengan permainan jumlah-nol. Permainan jumlah-bukan-nol sesungguhnya juga dapat dibuat sedemikian rupa menjadi permainan jumlah-nol, yakni dengan menambahkan seorang pemain fiktif, katakanlah "alam", ke dalam permainan tersebut. Akan tetapi tentu saja hal ini merupakan pekerjaan yang kompleks dan pelik. Buku ini membatasi diri pada analisis permainan jumlah-nol, sebagai pengenalan dasar terhadap teori permainan.

(3) Strategi Permainan

Pengertian strategi dalam teori permainan ialah suatu siasat atau rencana tertentu dari seorang pemain, sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi saingannya. Di samping menurut jumlah pemain dan ganjarannya sebagaimana diterangkan di atas, permainan diklasifikasikan pula menurut jumlah strategi yang tersedia bagi masing-masing pemain. Jika pemain pertama memiliki m kemungkinan strategi dan pemain kedua memiliki n kemungkinan strategi, maka permainan demikian dinamakan permainan $m \times n$. Letak arti penting dari pembedaan jenis permainan berdasarkan jumlah strategi ini adalah bahwa permainan dibedakan menjadi permainan berhingga dan permainan tak berhingga.

Permainan dikategorikan sebagai permainan berhingga apabila jumlah terbesar dari strategi yang dimiliki oleh setiap pemain berhingga atau tertentu; sedangkan jika setidak-tidaknya seorang pemain memiliki jumlah strategi yang tak berhingga atau tidak tertentu, maka permainan tersebut dikategorikan sebagai permainan tak berhingga. Uraian teori permainan dalam buku ini dibatasi hanya pada kasus permainan berhingga saja.

Berdasarkan uraian sampai sejauh ini, jelaslah bahwa ketiga unsur yang baru dibahas tadi merupakan unsur-unsur yang membedakan bentuk atau jenis sebuah permainan. Telah pula ditegaskan, bahwa teori permainan yang akan diuraikan dalam buku ini terbatas hanya pada kasus *"permainan dengan dua-pemain dan jumlah-nol serta strategi-berhingga"*. Selanjutnya, kini marilah kita bahas dua unsur penting lainnya dalam teori permainan yang tak ada sangkut pautnya dengan pembedaan bentuk sesuatu permainan, tetapi penting untuk difahami.

(4) Matriks Permainan

Setiap persoalan yang dianalisis dengan teori permainan senantiasa (dapat) disajikan dalam bentuk sebuah matriks permainan. Matriks permainan-disebut juga matrik ganjaran-adalah sebuah matriks yang unsur-unsurnya berupa ganjaran dari para pemain yang terlibat dalam permainan tersebut. Baris-barisnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain pertama, sedangkan kolom-kolomnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain lain. Dengan demikian, permainan berstrategi $m \times n$ dilambangkan oleh matriks permainan $m \times n$.

Teori permainan berasumsi bahwa strategi yang tersedia bagi masing-masing pemain dapat dihitung dan ganjaran yang berkenaan dengannya dapat dinyatakan dalam unit, meskipun tidak selalu harus dalam unit moneter. Hal ini penting bagi penyelesaian permainan, yakni untuk penentuan pilihan strategi yang akan dijalankan oleh masing-masing pemain, dengan menganggap bahwa masing-masing pemain berusaha memaksimumkan keberuntungannya yang minimum (*maksimin*) atau meminimumkan ketidakberuntungannya yang maksimum (*minimaks*).

Nilai dari suatu permainan adalah ganjaran rata-rata atau ganjaran yang diharapkan dari sepanjang rangkaian permainan, dengan menganggap kedua belah pihak pemain senantiasa berupaya memainkan strateginya yang optimum. Secara konvensional, nilai permainan dilihat dari pihak pemain yang strategi-strateginya dilambangkan oleh baris-baris matriks ganjaran, dengan kata lain dilihat dari sudut pandangan pemain pertama. Permainan dikatakan "adil" *(fair)* apabila nilainya nol, di mana tak seorang pemain pun memperoleh keuntungan atau kemenangan. Dalam permainan yang "tidak-adil" *(unfair)* seorang pemain akan memperoleh kemenangan atas pemain lain, yakni jika nilai permainan tersebut bukan nol; dalam

hal ini nilai permainan adalah positif jika pemain pertama (pemain baris) memperoleh kemenangan, sebaliknya nilai permainan adalah negatif jika pemain lain (pemain kolom) memperoleh kemenangan.

(5) Titik Pelana

Jika di dalam suatu matriks permainan terdapat sebuah unsur yang merupakan unsur maksimum dari minima baris dan unsur minimum dari maksima kolom sekaligus, maka unsur tersebut dinamakan titik pelana (*saddle point*). Jadi titik pelana adalah suatu unsur di dalam matriks permainan yang sekaligus merupakan maksimin baris dan minimaks kolom. Permainan dikatakan bersaing ketat (*strictly determined*) jika matriksnya mengandung titik pelana. Strategi yang optimum bagi masing-masing pemain adalah strategi pada baris dan kolom yang mengandung titik pelana tersebut. Dalam hal ini, baris yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain pertama, sedangkan kolom yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain lain.

Langkah pertama penyelesaian sebuah matriks permainan adalah mengecek ada tidaknya titik pelana. Bila terdapat titik pelana, permainan dapat segera dianalisis untuk diselesaikan; akan tetapi bila tak terdapat titik pelana, diperlukan penelaahan lebih lanjut. Penyidikan mengenai ada tidaknya titik pelana biasanya dikerjakan dengan cara menuliskan nilai-nilai minimum (*minima*) masing-masing baris dan nilai-nilai maksimum (*maksima*) masing-masing kolom, kemudian menentukan maksimum di antara minima baris dan minimum di antara maksima kolom tadi. Jika unsur maksimum dari minima baris sama dengan unsur minimum dari maksima kolom, dengan kata lain jika maksimin = minimaks, berarti unsur tersebut merupakan titik pelana.

Contoh-contoh penyidikan titik pelana :

Selidikilah, apakah pada permainan-permainan berikut ini terdapat titik pelana atau tidak.

(1)	4	6	— 3	2	— 3	
	7	13	5	9	5	maksimin = 5
	12	8	0	— 1	— 1	
	9	10	4	5	4	
	12	13	5	9	→ *maksima kolom*	
					↓ *minima baris*	

minimaks = 5

Terdapat sebuah titik pelana pada perpotongan baris kedua dengan kolom ketiga. Nilai permainan adalah 5, mengingat nilai titik pelananya 5. Baris kedua merupakan strategi optimum bagi pemain pertama atau pemain baris, sedangkan kolom ketiga merupakan strategi optimum bagi pemain lain atau pemain kolom.

(2)	7	2	— 4	8	0	— 4	
	3	— 8	— 9	6	— 11	— 11	maksimin = — 2
	— 1	4	— 2	5	5	— 2	
	7	4	— 2	8	5		

minimaks = — 2

Terdapat sebuah titik pelana pada perpotongan baris ketiga (strategi optimum bagi pemain pertama) dengan kolom ketiga (strategi optimum bagi pemain lain); nilai permainan adalah — 2.

(3)

4	7	5	4
13	— 2	— 1	— 2
9	3	— 6	— 6
10	— 8	15	— 8
13	7	15	

maksimin = 4

minimaks = 7

Tidak terdapat titik pelana, karena maksimin ≠ minimaks.

(4)

7	2	— 4	8	0	— 4
3	— 8	— 9	6	— 1	— 9
7	2	— 4	8	0	

maksimin = — 4

minimaks = — 4

Terdapat titik pelana (*saddle point*).

15.2 AKHIR DARI PERMAINAN

Penyelesaian dari suatu permainan dikatakan berakhir apabila telah ditemukan strategi optimum bagi masing-masing pemain yang terlibat.

Perhatikan permainan berikut :

Pemain *Y*

		1	2	3	
Pemain *X*	1.	25	— 15	50	— 15
	2.	10	40	— 5	— 5
		25	40	50	

strategi bagi Y

maksimin = — 5

maksima kolom

minimaks = 25

minima baris

strategi bagi X

Jika *X* menjalankan strategi 1 maka ganjaran terburuk yang harus ditanggungnya adalah — 15, sebagai contoh kongkret : misalnya ia harus membayar 15 rupiah kepada *Y*. Jika *X* menjalankan strategi 2 maka ganjaran terburuk yang harus ditanggungnya adalah — 5.*)

Di lain pihak, jika *Y* menjalankan strategi 1 maka ganjaran terburuk yang harus ditanggungnya adalah 25, sebagai contoh kongkret : misalnya ia harus membayar 25 rupiah kepada *X*. Jika *Y* menjalankan strategi 2 maka ganjaran terburuknya 40, sedangkan dengan strategi 3 ganjaran terburuknya 50.*)

Persoalannya kini adalah : di antara kemungkinan-kemungkinan terburuk tersebut, mana yang terbaik bagi seorang pemain ? Pengertian "terburuk" di sini hanya berlaku bagi masing-masing baris atau masing-masing kolom secara individual. Terburuk bagi sesuatu baris belum tentu seburuk seperti yang terburuk bagi baris lainnya. Begitu pula, terburuk bagi sesuatu kolom belum tentu seburuk seperti yang terburuk bagi kolom lainnya. Dalam kasus permainan yang sedang kita

*)Catatan :

Unsur-unsur *payoff* bagi pemain baris (*X*) harus dibaca dan ditafsirkan secara berlawanan dengan unsur-unsur *payoff* bagi pemain kolom (*Y*). Untuk *payoff* yang positif bagi *X* berarti melambangkan keberuntungan, sedangkan yang negatif melambangkan ketidakberuntungan. Sebaliknya unsur *payoff* yang positif bagi *Y* berarti melambangkan ketidakberuntungan, sedangkan yang negatif melambangkan keberuntungan.

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA

bahas ini, yang terburuk atau minimum di antara unsur-unsur pada baris pertama (strategi 1 bagi *X*) adalah — 15, sedangkan pada baris kedua (strategi 2 bagi *X*) adalah — 5. Yang terbaik di antara kedua terburuk ini, dengan kata lain yang maksimum di antara minimum-minimum tersebut adalah — 5; sebab ketidakberuntungan senilai 5 lebih baik daripada ketidakberuntungan senilai 15. Di lain pihak — ditinjau per kolom — yang terburuk dalam strategi 1, strategi 2 dan strategi 3 bagi *Y* masing-masing adalah 25, 40 dan 50. Yang terbaik di antara ketiga terburuk ini, dengan kata lain yang minimum di antara maksimum-maksimum tersebut, adalah 25; sebab ketidakberuntungan senilai 25 lebih baik daripada ketidakberuntungan senilai 40 dan 50.

Dengan demikian jelaslah bahwa dilihat dari sudut pandangan *X*, ganjaran-ganjaran terburuknya merupakan minima baris. Ganjaran terbaik di antara yang terburuk-terburuk itu adalah maksimum dari minima baris (maksimin).

Sedangkan dilihat dari sudut pandangan *Y*, ganjaran-ganjaran terburuknya merupakan maksima kolom. Ganjaran terbaik di antara yang terburuk-terburuk itu adalah minimum dari maksima kolom (minimaks).

Dalam kasus permainan kita tadi, maksimin = — 5 sedangkan minimaks = 25. Tafsiran mengenai pengertian maksimin dan minimaks ini sederhana sekali. Dengan memasukkan strategi maksiminnya berarti *X* dapat menjamin bahwa ketidakberuntungan terburuk yang akan dialaminya tidak akan melebihi 5 (*Y* tidak akan menikmati keberuntungan melebihi 5). Bersamaan dengan itu, bila *Y* memainkan strategi minimaksnya berarti *Y* dapat menjamin bahwa ketidakberuntungan yang akan dialaminya tidak akan melebihi 25 (*X* tidak akan menikmati keberuntungan melebihi 25). Pekerjaan pemecahan soal ini belumlah selesai, melainkan — karena maksimin tidak sama dengan minimaks — masih diteruskan sampai diperoleh nilai dari permainan tersebut *(value of the game)*. Nilai permainan melambangkan bahwa masing-masing pemain sudah menemukan strategi optimumnya.

Dalam hal terdapat titik pelana pada matriks permainan, pekerjaan penyelesaian dengan sendirinya berakhir sebab titik pelana tersebut sekaligus menunjukkan nilai dari permainan. Baris yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain baris, sedangkan kolom yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain kolom. Akan tetapi dalam hal tidak terdapat titik pelana (seperti kasus permainan yang baru kita bahas di atas), maka diperlukan telaah lebih lanjut untuk menemukan strategi optimum bagi masing-masing pemain atau nilai dari permainan.

15.3 PENYELESAIAN PERMAINAN DUA -PEMAIN DUA-STRATEGI

Konsep dasar analisis teori permainan — berupa permainan dengan dua-pemain dan dua-strategi, yakni permainan di mana setidak-tidaknya salah seorang pemain hanya memiliki dua macam strategi — akan diuraikan di dalam sub-bab ini. Sekedar perjanjian, masing-masing pemain kita namakan saja *X* dan *Y*. Strategi-strategi Pemain X tercantum dan ditunjukkan di dalam suatu kolom sepanjang tepi kiri matriks permainan, sedangkan strategi-strategi Pemain Y tercantum dan ditunjukkan di dalam suatu baris sepanjang tepi atas matriks permainan. Ganjaran yang dijadikan pedoman untuk menganalisis permainan adalah ganjaran Pemain X, yakni berupa sebuah bilangan positif yang mencerminkan suatu ganjaran dari Y kepada X dan berupa sebuah bilangan negatif yang mencerminkan suatu ganjaran dari X kepada Y.

15.3.1 Permainan 2 × 2

Permainan dua-strategi yang paling mudah dianalisis adalah permainan 2 × 2, yakni suatu permainan di mana masing-masing pemain hanya mempunyai dua kemungkinan strategi. Penyelesaian permainan 2 × 2 juga sangat penting sebagai jenjang pertama untuk dapat menyelesaikan permainan dua-strategi yang lebih besar (2 × n atau m × 2).

Contoh :

(1) Permainan

Pemain Y

		1	2
Pemain X	1	0	3
	2	−6	10

adalah permainan yang bersaing ketat dan adil. Dikatakan bersaing ketat ***(strictly determined)*** karena mengandung titik pelana, dikatakan adil ***(fair)*** karena nilai permainan atau nilai ganjaran titik pelananya nol. Dalam kasus ini, strategi optimum bagi X adalah strategi 1, strategi optimum bagi Y kebetulan juga strategi 1.

(2) Permainan

Pemain Y

		1	2
Pemain X	1	3	7
	2	5	8

adalah permainan yang bersaing ketat tetapi tidak adil (nilai permainannya adalah 5). Strategi optimum bagi X adalah strategi 2, strategi bagi Y adalah strategi 1.

(3) Permainan

		Pemain Y 1	Pemain Y 2
Pemain X	1	3	7
	2	5	2

adalah permainan yang tidak bersaing ketat.

15.3.2 Strategi Campuran

Dalam suatu permainan yang tidak bersaing ketat, tidak terdapat strategi yang optimum bagi seorang pemainpun. Oleh karenanya setiap strategi tertentu yang dijalankan oleh salah seorang pemain dapat dimanfaatkan oleh pemain lainnya. Di sinilah letak perbedaan penting antara permainan yang bersaing ketat dan yang tidak bersaing ketat. Dalam permainan yang bersaing ketat terdapat strategi yang optimum bagi masing-masing pemain, sehingga "tindakan untuk merahasiakan" strategi masing-masing tidak diperlukan; sedangkan dalam permainan yang tidak bersaing ketat diperlukan tindakan semacam itu, untuk menjaga agar jangan sampai suatu strategi yang akan dijalankan oleh seorang pemain diketahui oleh pemain lain yang menjadi saingannya; hal ini dilakukan dengan cara memilih strategi yang akan dijalankan oleh masing-masing pemain secara rambang *(random)* yakni berdasarkan probabilitasnya yang dapat dihitung dari matriks permainan. Strategi semacam ini, yang terdiri dari campuran probabilitas lebih dari satu strategi, dinamakan strategi campuran *(mixed strategy)*.

Penyelesaian permainan 2×2 yang tidak bersaing ketat terdiri dari sepasang probabilitas p_1 dan p_2 bagi Pemain X serta sepasang probabilitas q_1 dan q_2 bagi Pemain Y. Nilai-nilai probabilitas ini memungkinkan ditemukannya strategi-strategi campuran yang optimum, yaitu strategi yang akan dijalankan oleh masing-masing pemain demi memaksimumkan harapan keberuntungannya yang minimum atau meminimumkan ketidakberuntungannya yang maksimum.

Nilai-nilai probabilitas ganjaran tersebut dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

Andaikan matriks permainannya :

$$M = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

maka harapan ganjaran bagi Pemain X adalah :

$ap_1 + c(1 - p_1)$ jika Pemain Y menjalankan strategi 1;
dan adalah :
$bp_1 + d(1 - p_1)$ jika Pemain Y menjalankan strategi 2.
Selanjutnya, dengan menyamakan kedua harapan ganjaran tersebut, diperoleh :

$$\begin{aligned} ap_1 + c(1 - p_1) &= bp_1 + d(1 - p_1) \\ p_1 (a - b - c + d) &= d - c \\ p_1 &= \frac{d - c}{a - b - c + d} \\ p_2 = 1 - p_1 &= \frac{a - b}{a - b - c + d} \end{aligned}$$

Dengan cara serupa, harapan ganjaran bagi Pemain Y dapat pula dihitung :

$$\begin{aligned} aq_1 + b(1 - q_1) &= cq_1 + d(1 - q_1) \\ q_1(a - b - c + d) &= d - b \\ q_1 &= \frac{d - b}{a - b - c + d} \\ q_2 = 1 - q_1 &= \frac{a - c}{a - b - c + d} \end{aligned}$$

Nilai suatu permainan adalah jumlah yang dapat diharapkan oleh seorang pemain untuk memenangkan permainan terbaiknya melawan permainan terbaik saingannya. Prinsip dasar mengenai pengertian nilai permainan ini berlaku baik bagi permainan yang sifatnya bersaing ketat maupun yang tidak bersaing ketat. Pada dasarnya seorang pemain tidak mungkin menang melebihi nilai tersebut, kecuali jika saingannya bermain buruk; begitu pula seorang pemain tak mungkin menang kurang dari nilai tersebut, kecuali jika ia bermain buruk.

Nilai permainan $M = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ (bagi Pemain X) adalah :

$$
\begin{aligned}
v &= ap_1 + c(1 - p_1) = bp_1 + d(1 - p_1) \\
&= -[aq_1 + b(1 - q_1)] = -[cq_1 + d(1 - q_1)] \\
&= \frac{ad - bc}{a - b - c + d}
\end{aligned}
$$

Contoh :

(1) Permainan $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 7 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline\end{array}$ adalah permainan yang tidak bersaing ketat. Strategi-strategi campuran yang optimum :

$$p_1 = \frac{d - c}{a - b - c + d} = \frac{2 - 5}{3 - 7 - 5 + 2} = \frac{3}{7}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{4}{7}$$

$$q_1 = \frac{d - b}{a - b - c + d} = \frac{2 - 7}{3 - 7 - 5 + 2} = \frac{5}{7};$$

$$q_1 = 1 - q_1 = \frac{2}{7}$$

Nilai permainannya :

$$v = \frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{3(2) - 7(5)}{3 - 7 - 5 + 2} = \frac{29}{7}$$

Karena v positif, sedangkan tinjauan terhadap hasil akhir permainan dilihat dari sudut pandangan pemain baris (dalam hal ini adalah X), maka permainan ini cenderung menguntungkan X atau merugikan Y.

(2) Permainan $\begin{array}{|c|c|}\hline -3 & -7 \\ \hline -5 & 2 \\ \hline\end{array}$ adalah permainan yang tidak bersaing ketat. Strategi-strategi campuran yang optimum :

$$p_1 = \frac{5}{11} \qquad p_2 = \frac{6}{11}$$

$$q_1 = \frac{9}{11} \qquad q_2 = \frac{2}{11}$$

Nilai permainannya $v = -\frac{41}{11}$ (permainannya cenderung merugikan X atau menguntungkan Y).

(3) Permainan $\begin{array}{|c|c|} \hline 7 & -6 \\ \hline 5 & 8 \\ \hline \end{array}$ adalah permainan yang tidak bersaing ketat. Strategi-strategi campuran yang optimum :

$$p_1 = \frac{3}{16} \qquad p_2 = \frac{13}{16}$$

$$q_1 = \frac{14}{16} \qquad q_2 = \frac{2}{16}$$

Nilai permainannya $v = \frac{43}{8}$ (permainannya cenderung menguntungkan X).

(4) Permainan $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -3 \\ \hline -1 & 2 \\ \hline \end{array}$ adalah permainan yang tidak bersaing ketat. Strategi-strategi campuran yang optimum :

$$p_1 = \frac{3}{7} \qquad p_2 = \frac{4}{7}$$

$$q_1 = \frac{5}{7} \qquad q_2 = \frac{2}{7}$$

Nilai permainannya $v = -\frac{1}{7}$ (permainan cenderung menguntungkan Y).

15.3.3 Penyelesaian Permainan 2 × 2 dengan Aljabar Matriks

Strategi-strategi yang optimum dan nilai dari suatu permainan 2 × 2 yang tidak bersaing ketat, dapat pula dicari dengan aljabar matriks.
Andaikan matriks ganjaran dari suatu permainan ditunjukkan oleh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka strategi optimum bagi X adalah :

$$[\,p_1 \quad p_2\,] = \frac{[\,1 \quad 1\,]\,(\text{adj. }\mathbf{A})'}{[\,1 \quad 1\,]\,(\text{adj. }\mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

dan strategi optimum bagi Y adalah :

$$[\,q_1 \quad q_2\,) = \frac{[\,1 \quad 1\,]\,(\text{adj. }\mathbf{A})}{[\,1 \quad 1\,]\,(\text{adj. }\mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

sedangkan nilai permainannya adalah :

$$\mathbf{v} = \frac{|\,\mathbf{A}\,|}{[\,1 \quad 1\,]\,(\text{adj. }\mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

atau, sebagai alternatif :

$$\mathbf{v} = [\,p_1 \quad p_2\,] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Sebagai ilustrasi, Contoh (2) dan Contoh (3) di atas tadi kita coba kini diselesaikan dengan aljabar matriks.

(2) Permainan

— 3	— 7
— 5	2

adalah permainan yang tidak bersaing ketat.

Maka :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = -6 - 35 = -41$$

$$\text{adj. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{adj. } \mathbf{A})' = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1] \; (\text{adj. } \mathbf{A})'}{[1 \quad 1] \; (\text{adj. } \mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

$$[q_1 \quad q_2] = \frac{[1 \quad 1] \; (\text{adj. } \mathbf{A})}{[1 \quad 1] \; (\text{adj. } \mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Jadi, strategi-strategi campuran yang optimum :

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA

$$p_1 = \frac{7}{11} \qquad p_2 = \frac{4}{11}$$

$$q_1 = \frac{9}{11} \qquad q_2 = \frac{2}{11}$$

Sedangkan nilai permainannya :

$$v = \frac{|\,\mathbf{A}\,|}{[1 \quad 1] \ (\text{adj.}\,A) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = -\frac{41}{11}$$

atau dengan cara lain :

$$v = [p_1 \quad p_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$= [\frac{7}{11} \quad \frac{4}{11}] \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/11 \\ 2/11 \end{bmatrix} = -\frac{41}{11}$$

(3) Permainan

7	−6
5	8

adalah permainan yang tidak bersaing ketat. Maka :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad |\,\mathbf{A}\,| = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 56 + 30 = 86$$

$$\text{adj. }\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{adj. }\mathbf{A})' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[p_1 \quad p_2] = \frac{[1 \quad 1]\,(\text{adj. }\mathbf{A})'}{[1 \quad 1] \ (\text{adj. }\mathbf{A}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix}$$

$$[q_1 \quad q_2] = \frac{[1 \quad 1] \text{ (adj. A)}}{[1 \quad 1] \text{ (adj.A)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{14}{16} & \frac{2}{16} \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{|A|}{[1 \quad 1] \text{ (adj. A)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{86}{16} = \frac{43}{8}$$

atau

$$v = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14/16 \\ 2/16 \end{bmatrix} = \frac{43}{8}$$

(Bandingkan antara hasil-hasil perhitungan dengan aljabar matriks ini dan dengan cara sebelumnya).

Latihan Teori Permainan

Selidiki apakah matriks-matriks permainan berikut mengandung titik pelana ataukah tidak. Jelaskan pula apakah permainannya bersaing ketat ataukah tidak bersaing ketat. Jika saudara berpendapat permainan bersaing ketat, jelaskan berapa nilai permainan tersebut serta strategi optimum bagi masing-masing pemain baris (X) dan pemain kolom (Y).

1.

5	8
3	9

2.

9	3
5	8

3.

— 6	4	— 8
2	5	— 10

4.

— 6	4	— 8
2	— 10	5

5.

— 6	2
4	5
— 8	— 10

6.

— 6	2
4	— 10
— 8	5

7.

18	16	24
13	15	7
22	18	19

8.

12	— 3	6	8
—5	10	— 4	15
9	11	17	— 1

9.

28	20	34	23	31
23	21	27	24	34
26	32	30	25	29

10.

20	14	— 15	12	24	26
— 10	13	18	22	— 18	25

Dari permainan-permainan yang tidak bersaing ketat berikut ini, carilah strategi-strategi campuran yang optimum dan nilai permainannya.

11.

9	3
5	8

12.

2	0
0	2

13.

11	4
7	9

14.

2	— 3
— 6	4

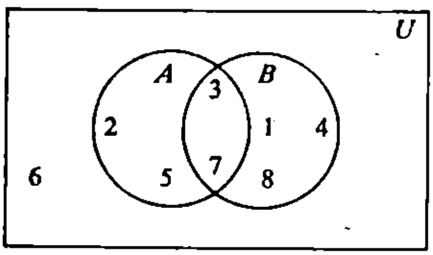
15.

— 12	— 16
— 14	— 10

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

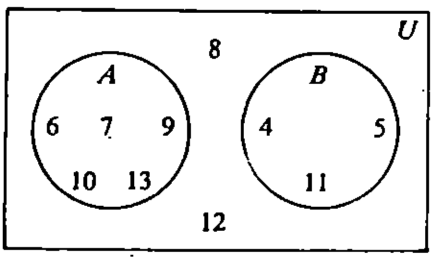
HIMPUNAN (Halaman 9)

1.



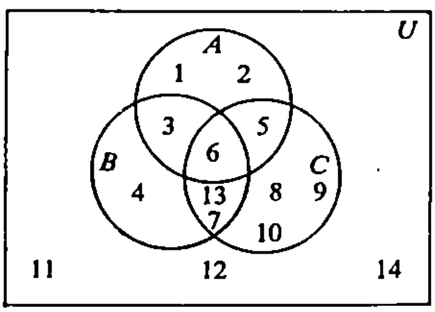
(a) $A - B = \{2, 5\}$
(b) $B - A = \{1, 4, 8\}$
(c) $A \cap B = \{3, 7\}$
(d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
(e) $A \cap \overline{B} = \{2, 5\}$
(f) $B \cap \overline{A} = \{1, 4, 8\}$

2.



(a) $A - B = \{6, 7, 9, 10, 13\} = A$
(b) $B - A = \{4, 5, 11\} = B$
(c) $A \cap B = \{\} = \emptyset$, disjoin
(d) $A \cap \overline{B} = \{6, 7, 9, 10, 13\} = A - U = A$
(e) $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13\}$
(f) $A \cup \overline{B} = \{6, 7, 8, 9, 10, 12, 13\}$

3.



(a) $A \cap B = \{3, 6\}$
(b) $B \cap C = \{6, 7, 13\}$
(c) $C \cap A = \{5, 6\}$
(d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13\}$
(e) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13\}$
(f) $A \cap B \cap C = \{6\}$
(g) $(A \cup B) \cap C = \{5, 6, 7, 13\}$
(h) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C = \{8, 9, 10\}$
(i) $A \cap B \cap \overline{C} = \{3\}$

4. (a) $\overline{P} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$
   (b) $\overline{Q} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
   (c) $\overline{R} = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

5. (a) $P \cap Q = \varnothing$
   (b) $P \cup Q = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
   (c) $P \cap R = \varnothing$
   (d) $P \cup R = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
   (e) $Q \cap R = \{9\}$
   (f) $Q \cup R = \{0, 3, 5, 7, 9\}$

6. (a) $P - Q = \{2, 4, 6, 8\}$
   (b) $Q - P = \{0, 5, 9\}$
   (c) $P \cap \overline{Q} = \{2, 4, 6, 8\}$
   (d) $\overline{P} \cap Q = \{0, 5, 9\}$
   (e) $P - (Q - R) = \{2, 4, 6, 8\}$
   (f) $(P - Q) - R = \{2, 4, 6, 8\}$

7. (a) $P \cup (Q \cap R) = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
   (b) $P \cap (Q \cup R) = \varnothing$
   (c) $(P \cup Q) \cap (P \cup R) = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
   (d) $(P \cap Q) \cup (P \cap R) = \varnothing$

8. (a) $\overline{P} \cup \overline{Q} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   (b) $(\overline{P \cup Q}) = \{1, 3, 7\}$
   (c) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \{1, 3, 7\}$
   (d) $(\overline{P \cap Q}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

9. (a) $B \cup (B \cup A) = (B \cup B) \cup A = B \cup A$
   (b) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B$

10. (a) Benar
   (b) Salah, seharusnya : $A \cap \overline{A} = \varnothing$
   (c) Benar
   (d) Benar
   (e) Benar
   (f) Salah, seharusnya : $C \cap C = C$
   (g) Benar
   (h) Benar
   (i) Salah, seharusnya : $(\overline{\overline{B}}) = B$
   (j) Salah, seharusnya : $(A - C) \cup C = A \cup C$
   (k) Salah, seharusnya : $B \cap (B - D) = B - D$
   (l) Benar

SISTEM BILANGAN (Halaman 27)

1. Tidak selalu. Pernyataan tersebut hanya benar jika a, b dan x semuanya positif, tetapi tidak benar jika $x \leqslant 0$

2. Pernyataan yang salah — dengan perkataan lain, jawaban yang benar — adalah (d).

3. (a) 0,375 (c) 0,150 (e) 2,750
   (b) 0,583 (d) — 0,625 (f) — 1,667

4. (a) Spbt = 24 (c) Spbt = 21
   (b) Spbt = 12 (d) Spbt = 6

5. (a) 1 1/24 (c) 2 16/21
   (b) 1 ¼ (d) 5 1/6

6. (a) — 0,292 (c) — 1,905
   (b) 0,417 (d) — 3,500

7. (a) ¼ (c) 1
   (b) 25/72 (d) 3 11/18

8. (a) 0,562 (c) 0,184
   (b) 2 (d) 0,192

9. (a) 1 17/84 (c) 1/28
   (b) 25/84 (d) 15 ¾

10. (a) 0,54 (c) 0,0037
    (b) 0,10 (d) 27,35

PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA (Halaman 40)

1. (a) $4^2 = 16$
   (b) $(-90)^4 = 65\,610\,000$
   (c) $4^8 = 65\,536$
   (d) $(-\frac{15}{6})^4 = \frac{50\,625}{1\,296} = 39\ 1/16$

2. (a) $\sqrt[3]{36}$ (c) $\sqrt[7]{9}$
   (b) $\sqrt[3]{1296}$ (d) $\sqrt[5]{49} + \sqrt[5]{729}$

3. (a) $5\sqrt{5} = 11{,}18$ (c) $\sqrt{169} = 13$
   (b) $5\sqrt[3]{3375} = 75$ (d) $2{,}5\sqrt{4} = 5$

4. (a) ${}^{5}\log 625$ (c) ${}^{4}\log 16$
   (b) ${}^{4}\log 64$ (d) ${}^{3}\log 9$

5. (a) 0,9542 (c) 5,5918
   (b) 1,2304 (d) 0,3890

6. (a) 3,6990 (c) 5,6990
   (b) 0,3010 (d) 2,3010

7. (a) 2 (c) 7,48
   (b) 17 (d) 2

8. (a) 8,706 (b) 9,27

9. (a) 2,3495 (b) 1

10. (a) 2 (c) 1
    (b) 3 (d) 2,83

DERET (Halaman 48)

1. (a) 300 (c) 1250
   (b) 425 (d) 3125

2. $S_4 = 850$; $S_{15} = 300$ dan $J_{10} = 7750$

3. (a) 10 (c) 16
   (b) 200 (d) 2800

4. (a) 40 (c) 250
   (b) 85 (d) 85 885

5. (a) — 1500 (c) 346 500
   (b) 22 (d) 346 500

6. (a) 54 (c) 98
   (b) 4 (d) 720

7. $a = 90$ dan $b = -30$

8. Pada S_{10}

9. $n = 10$

10. (a) 2 430 (d) 3 640
    (b) 196 830 (e) 295 240
    (c) 47 829 690 (f) 71 744 530

11. (a) 50 (c) 12 800
    (b) 4 (d) 17 050

12. (a) 2 (c) 1 562
    (b) 156 250 (d) 39 062

13. (a) 48 (c) 33
    (b) — 96 (d) — 63

14. Pada S_4

15. (a) Pada S_8
    (b) S_5 DH > S_5 DU

F U N G S I (Halaman 74)

1. (a) $x = 4$; $y = -2$
   (b) $x = 0{,}35$ dan $5{,}65$; $y = -2$
   (c) $x = -1{,}19$ dan $9{,}19$; $y = 7{,}47$ dan $-1{,}47$
   (d) $x = -2$ dan 3; $y = 18$

2. (a) Tidak simetrik terhadap sumbu — x, sumbu — y dan titik pangkal.
   (b) Simetrik hanya terhadap titik pangkal.
   (c) Simetrik terhadap sumbu — x, sumbu — y dan titik pangkal.
   (d) Simetrik hanya terhadap sumbu — x.

3. (a) Perpanjangan searah — x terbatas hanya untuk interval $-10 \leqslant x \leqslant 10$, dan searah — y terbatas hanya untuk interval $-10 \leqslant y \leqslant 10$.
   (b) Perpanjangan searah sumbu manapun tidak terbatas.
   (c) Perpanjangan searah — x hanya berlaku untuk $x \geqslant 2{,}5$ sedangkan perpanjangan searah — y tidak terbatas.
   (d) Perpanjangan searah — x hanya berlaku untuk $x^2 \leqslant 6$ sedangkan searah — y hanya berlaku untuk $y^4 \leqslant 6$.

4. (a) Tidak mempunyai asimtot vertikal maupun horizontal.
   (b) $x = \pm 2$ merupakan asimtot-asimtot vertikal dan $y = 1$ merupakan asimtot horizontal.
   (c) $x = -0{,}5$ dan $y = 0{,}5$ merupakan asimtot-asimtotnya.
   (d) Tidak mempunyai asimtot vertikal maupun horizontal.

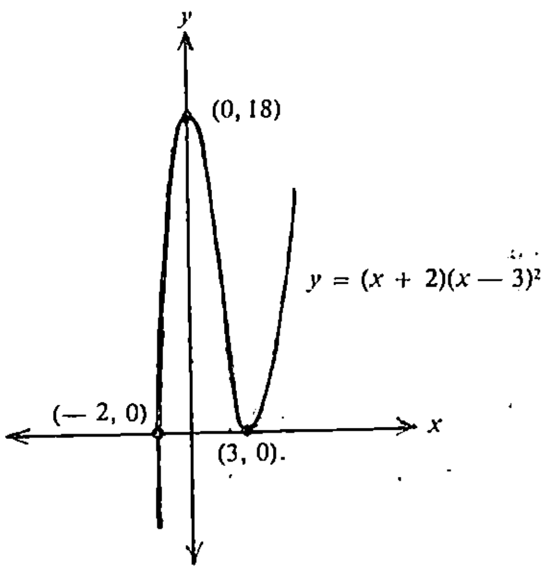
5. (a) $x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y) = 0$
   (b) Tidak dapat difaktorkan
   (c) Tidak dapat difaktorkan
   (d) $x^2y - xy^2 - x + y = (xy - 1)(x - y) = 0$

6. (a) $x = \sqrt[3]{9}$; $y = 0$
   (b) Simetrik hanya terhadap sumbu — x.
   (c) Perpanjangan searah — x hanya berlaku untuk $x^3 \geq 9$, perpanjangan searah — y tidak terbatas.

7. (a) $x = -2$; $y = -2$
   (b) Tidak simetrik terhadap sumbu — x, sumbu — y dan titik pangkal.
   (c) Perpanjangan kurva searah — x dan searah — y tidak terbatas.
   (d) Asimtot-asimtotnya adalah $x = 1$ dan $y = 1$.
   (e) Persamaannya tidak dapat difaktorkan.

8. (a) $x = -2$ dan 6; $y = 12$
   (b) Tidak simetrik terhadap sumbu — x, sumbu — y dan titik pangkal.
   (c) Perpanjangan kurva tidak terbatas.
   (d) Tidak mempunyai asimtot vertikal maupun horizontal.
   (e) Persamaannya tidak dapat difaktorkan.

9. (a) $x = -2$ dan 3; $y = 18$
   (b) Tidak simetrik terhadap sumbu manapun dan titik pangkal.
   (c) Tidak terdapat batas perpanjangan kurva.
   (d) Tidak mempunyai asimtot vertikal maupun horizontal.
   (e) $(x + 2)(x - 3)^2 - y = 0$ tidak dapat difaktorkan.



10. (a) Benar
    (b) Benar
    (c) Salah; a.h. pada $y = 0$ (a.v. pada $x = \frac{1}{4}$)
    (d) Benar
    (c) Salah; simetrik terhadap sumbu — y
    (f) Salah; simetrik terhadap titik pangkal.

FUNGSI LINEAR (Halaman 89)

1. (a) $y = 2 - 2x$ (b) $y = -2$ (c) $y = 5x$ (d) $y = 5 - x$

2. (a) $y = 2 - x$ (b) $y = 5 + 2x$ (c) $y = 8 + 5x$ (d) $y = 3$

3. (a) 8 (b) 4 (c) 0 (d) -2

4. (a) -1 dan 0 (b) -4 dan -3 (c) 3 dan -7 (d) 4 dan 6

5. (a) (2, 6) (b) (2, 6) (c) (2, 6) (d) (2, 6)

6. (a) 282 (b) -180 dan (c) 0

7. $x = 3$, $y = 5$

8. $x = 3$, $y = 5$

9. $a = 5$, $b = 3$ dan $c = -5$

10. $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$, $s = 4$ dan $t = 5$

FUNGSI NON-LINEAR (Halaman 141)

1. (a) 29 (b) 10 (c) -1 (d) 36

2. (a) 4 (b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ (c) 9 (d) 4

3. (a) (2,5; 20,25) dan (3,5; 2,25)
   (b) (3; 21) dan (— 4; 0)
   (c) (2; 40) dan (— 4,57; 58, 72)
   (d) (58,39; 2,77) dan (— 190,87; — 5,77)

4. (a) hiperbola (b) elips (c) lingkaran (d) parabola

5. (a) parabola (b) lingkaran (c) hiperbola (d) elips

6. (a) $(-4; 1)$, $r = 6$ (c) $(-4; 2)$, $r = 0$
   (b) $(4; 4)$, $r = 6$ (d) $(-4; 0)$, $r = 0$

7. (a) $(0; 0)$, jari-jari pendek $(r_1) = 5$, jari-jari panjang $(r_2) = 10$
   (b) $(2; 3)$, jari-jari pendek $(r_1) = 2$, jari-jari panjang $(r_2) = 3$
   (c) $(-4; 2)$, jari-jari panjang $(r_1) = 6$, jari-jari pendek $(r_2) = 3$
   (d) $(-4; 2)$, $r_1 = r_2 = 0$

8. (a) $(2; 3)$, $m = n = 1$, $y_1 = x + 1$, $y_2 = -x + 5$
   (b) $(1; 1)$, $m = 2$, $n = 3$, $y_1 = 1{,}5x - 0{,}5$, $y_2 = -1{,}5x + 2{,}5$
   (c) $(2; 3)$, $m = 2$, $n = 3$, $y_1 = 1{,}5x$, $y_2 = -1{,}5x + 6$
   (d) $(0; 0)$, $m = n = 2$, $y_1 = x$, $y_2 = -x$

9. (a) (5; 2) parabola terbuka ke atas
   (b) (3; 10) parabola terbuka ke bawah
   (c) (2; 6) parabola terbuka ke kanan
   (d) (12; 6) parabola terbuka ke kiri

10. (1; 0) dan (3; 0).

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMIK (Halaman 164)

1. Pola kurvanya seperti Gambar 7-23(b).
   Titik potong (0; 2,05), asimtot $y = 2$.

2. Pola kurvanya seperti Gambar 7-24(c).
   Titik potong (0; — 2,4), asimtot $y = -2$.

3. Pola kurvanya seperti Gambar 7-23(c).
   Titik potong (0; 0) dan asimtot $y = -3$
   Kurva eksponensial ini melalui titik pangkal (0; 0).

4. Pola kurvanya seperti Gambar 7-23(a).
   Titik potong (0; 0,55), asimtot $y = 0{,}5$.

5. Pola kurvanya seperti Gambar 7-24(a).
   Titik potong (6,4377; 0) dan (0; 2,4), asimtot $y = 3$.

6. Pola kurvanya seperti Gambar 7-24(c).
   Titik potong (— 18,3258; 0) dan (0; — 6), asimtot $y = 4$.

7. Pola kurvanya seperti Gambar 7-23(f).
   Titik potong (— 1; 0) dan (0; — 2), asimtot $y = -6$.
   $f(2{,}4661) = -4{,}5285$, sedangkan $f(7{,}3983) = -5{,}8008$.

8. Pola kurvanya seperti Gambar 7-24(d).
   Titik potong (0,6931; 0) dan (0; — 0,5), asimtot y = 0,5.
   $f(3)$ = 0,4502, sedangkan $f(-3)$ = — 19,5855.

9. Pola kurvanya seperti Gambar 7-27(b).
   Titik potong (19,0855; 0) dan (0; 0,75).
   $f(4)$ = 0,3477 dan $f(9)$ = 0,1744.

10. Pola kurvanya seperti Gambar 7-27(d).
    Titik potong (— 0,1175; 0) dan (0; — 50).
    $f(4)$ = — 693,7752 dan $f(9)$ = — 971,0340.

LIMIT (Halaman 189)

1. 3
2. 242
3. 10
4. 2
5. 8
6. — 16
7. 2
8. 14
9. 4
10. 10
11. 225/64
12. 3
13. — 1
14. 0
15. 1
16. ½
17. 3.
18. 1
19. ½
20. ∞

KESINAMBUNGAN (Halaman 193)

1. sinambung
2. asinambung titik pada x = — 7
3. asinambung titik pada x = ¼
4. asinambung titik pada x = 3
5. asinambung tak berhingga pada x = 4
6. sinambung
7. asinambung berhingga pada x = 0
8. asinambung berhingga pada x = 3
9. asinambung tak berhingga pada x = 3
10. sinambung.

DIFERENSIASI DASAR (Halaman 207)

1. $6x^2 - 8x + 7$
2. $3x^{-2} - 12x^{-3}$
3. $6x^2 - 12x - 8$
4. $12x + 3 + x^{-1}$
5. $\dfrac{x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 12x + 18}$
6. $30x + 1$
7. $(5x + 12 - 2x^{-1})(15 + 6x^{-2})$
8. $-(20x + 8)/x^3$
9. $\dfrac{-5 \log e}{x^2 - x - 6}$
10. $\dfrac{6x \log e}{x^2 - 7}$
11. $\dfrac{-5}{x^2 - x - 6}$
12. $\dfrac{6}{x^2} \ln 4x^3$
13. $10^x e^{x^2} (2x + \ln 10)$
14. $(1/x - \ln 2x)/e^x$
15. $(2x^3 + 5x^2 + 2x)e^{x^2 + 5x - 3}$
16. $4x e^{2x-1} e^{2x} (1 + \ln 2x)$
17. $\dfrac{1}{4 + 2y^{-3}}$
18. $\dfrac{5y^2 - 4y}{10y - 4}$
19. $\dfrac{2x - y}{x + 2y}$
20. $\dfrac{e^{-x} - ey^2}{2exy + 2e^{2y}}$

DIFERENSIASI LANJUT (Halaman 219)

1. $dy = 0{,}74$ $\Delta y = 0{,}745616$ dy/dx "under-estimated"
2. $dy = 0{,}460937$ $\Delta y = 0{,}4553572$ dy/dx "over-estimated"
3. (a) $12x - 8$ (b) $-6x^{-3} + 36x^{-4}$
   (c) $12x - 12$ (d) $12 - x^{-2}$
4. (a) $(432x - 144)/x^6$ (b) $-(120x^{1/2} + 96)/x^6$
   (c) $2/x^3$ (d) $(3/8)x^{-5/2} + (10/27)x^{-8/3} + (21/64 x^{-11/4}$
5. Menurun pada $x = 3$ dan menaik pada $x = 6$
6. Menaik baik pada $x = 3$ maupun pada $x = 6$

7. (a) (4; 7) minimum (b) (4; 7) maksimum
   (b) (5; 2) minimum (d) (3; 10) maksimum.

8. (0; 0) minimum, menyinggung sumbu — x, memotong sumbu — y pada $y = 0$.

9. (a) maksimum : (1; 47)
   titik belok : (3; 31)
   minimum : (5; 15)

   (b) minimum : (0; 0)
   titik belok : (3; 108)
   maksimum : (6; 216)

10. maksimum (— 3; 54), titik belok (0; 0), minimum (3; — 54)
    menaik pada $x = \pm 4$ dan menurun pada $x = \pm 2$.

DIFERENSIASI PARSIAL (Halaman 252)

1. (a) $\partial y/\partial x = 8x - 12xz + 3z^2$
   $\partial y/\partial z = -6x^2 + 6xz + 6z$
   (b) $(\partial y/\partial x)\, dx = (8x - 12xz + 3z^2)\, dx$
   $(\partial y/\partial z)\, dz = (-6x^2 + 6xz + 6z)\, dz$
   (c) $dy = (8x - 12xz + 3z^2)\, dx + (-6x^2 + 6xz + 6z)\, dz$

2. (a) $\partial y/\partial x = 6x + 4xz - 4z^2$
   $\partial y/\partial z = -10z + 2x^2 - 8xz - 9$
   $\partial^2 y/\partial x^2 = 6 + 4z$
   $\partial^2 y/\partial z^2 = -10 - 8x$
   $\partial^2 y/\partial x\,\partial z = 4x - 8z$
   $\partial^2 y/\partial z\,\partial x = 4x - 8z$
   (b) $\partial y/\partial x = 12x + 8x/z$
   $\partial y/\partial z = -4x^2/z^2 - 3$
   $\partial^2 y/\partial x^2 = 12 + 8/z$
   $\partial^2 y/\partial z^2 = 8x^2/z^3$
   $\partial^2 y/\partial x\,\partial z = -8x/z^2$
   $\partial^2 y/\partial z\,\partial x = -8x/z^2$

3. $x = 5$, $z = 4$ dan $y = 12$ (minimum)

4. $q = 3$, $r = 4$ dan $p = 7$ (maksimum)

5. Untuk $x = 4$ dan $y = -2 \rightarrow z = 20$ (maksimum)
   Untuk $x = -4$ dan $y = 2 \rightarrow z = -20$ (minimum)

6. $r = 20$, $s = 2$ dan $f(20, 2) = 360$

7. $x = 8$, $y = 5$ dan $f(8, 5) = 225$

8. $x = 4$, $y = 7$ dan $f(4, 7) = 267$

9. (a) $x = 6$, $y = 12$ dan $f(6, 12) = 648$
   (b) $x = 6$, $y = 12$ dan $f(6, 12) = 648$

10. (a) $x = 31$, $y = 4$ dan $f(31, 4) = 1517$
    (b) $x = 31$, $y = 4$ dan $f(31, 4) = 1517$.

INTEGRASI TAKTENTU (Halaman 272)

1. $\frac{1}{4}x^4 + k$

2. $-\frac{1}{3}x^{-3} + k$

3. $3x^3 + k$

4. $5 \ln x + k$

5. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + 4x + k$

6. $\frac{2}{15}(2 + 5x)^{3/2} + k$

7. $-3\sqrt{1 - x^2} + k$

8. $e^x(x^2 - 2x + 2) + k$

9. $\frac{e^x}{1 + x} + k$

10. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + k$

11. $\sqrt{2x}\left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{5}x^2\right) + k$

12. $\frac{1}{4}x^4 - 4x^{5/2} + 25x + k$

13. $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + k$

14. $e^x (x^2 + 1) + k$

15. $-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x + 1) + k$

16. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

17. $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + k$

18. $\frac{1}{2}\ln\left\{(x + 1)^2 + (a + 1)^2\right\} + k$

19. $\frac{1}{4}(x^2 + 3x + 4)^4 + k$

20. $\frac{3}{5}x^{5/3} + x^2 + \frac{3}{7}x^{7/3} + k.$

INTEGRASI TERTENTU (Halaman 281)

1. 10
2. 260
3. 2080
4. 2350
5. 132
6. 9
7. 10
8. 172
9. 132
10. —2350
11. 9
12. 20
13. 3,7
14. 29/4
15. 3,5 a^2.

PENGOPERASIAN MATRIKS (Halaman 298)

1.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix} \qquad X - Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

(a) $\begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

4. (a) $(\mathbf{AC})_{2\times 3}$ (d) $(\mathbf{BC})_{4\times 3}$

(b) $(\mathbf{DA})_{3\times 3}$ (e) $(\mathbf{DAC})_{3\times 3}$

(c) $(\mathbf{AD})_{2\times 2}$ (f) $(\mathbf{BCDA})_{4\times 3}$

5.

(a) $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -11 \\ 0 & -5 & -10 \\ 1 & -4 & -9 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 18 \\ 2 & 10 & 18 \\ 2 & 10 & 18 \end{bmatrix}$

6.

$$\mathbf{XY} = \begin{bmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{bmatrix}$$

7. $\mathbf{KL} = \begin{bmatrix} 48 & 88 & 73 \end{bmatrix}$

LM tak bisa dioperasikan, begitu pula **KLM**.

8.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -24 & -52 \\ -24 & -52 \end{bmatrix}$

9.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & -16 & -1 \\ -11 & -21 & 1 \\ 15 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 11 & 21 & -1 \\ -15 & -8 & -5 \end{bmatrix}$

10.

(a) $\begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 33 & 55 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 34 & 18 & -18 \\ 45 & 35 & -15 \\ 37 & 14 & -24 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -33 & -55 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$

PENGUBAHAN MATRIKS (Halaman 308)

1.

$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}' = [-3 \quad -2 \quad 9]$

$\mathbf{d}' = [2 \quad 8 \quad 3]$

2.

$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

3.

$(\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R})' = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -3 \\ 19 & -3 \end{bmatrix}$ $(\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{R})' = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 11 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$

$(\mathbf{P} + \mathbf{Q})' - \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -4 & -5 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$ $(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{R})' = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -4 & -5 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

4.

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q})'\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & -8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 20 & -20 & 20 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{P} - \mathbf{Q})'\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -21 & 21 & -21 \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{Q} + \mathbf{R})' = \begin{bmatrix} 74 & 88 \\ -62 & -38 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{R} - \mathbf{P})'\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -7 & 20 & -30 \\ -39 & 36 & 42 \\ 57 & -56 & -52 \end{bmatrix}$$

5.

(a) $\begin{bmatrix} 18 & -15 & 10 \\ 810 & -627 & 298 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 94 & 1128 \\ -422 & -5064 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 222 & 810 \\ -117 & -423 \\ -92 & -348 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -17 & 93 \\ 14 & 262 \end{bmatrix}$

DETERMINAN DAN ADJOIN MATRIKS (Halaman 321)

1. $|\mathbf{A}| = 60$ $|\mathbf{B}| = 34$ $|\mathbf{C}| = 174$

2. Minor-minor matriks **A** :

$M_{11} = 26$ $M_{12} = 37$ $M_{13} = 11$
$M_{21} = -5$ $M_{22} = -5$ $M_{23} = 5$
$M_{31} = -5$ $M_{32} = -5$ $M_{33} = -7$

Minor-minor matriks **B** :

$M_{11} = 1$ $M_{12} = -11$ $M_{13} = -12$ $M_{14} = 15$
$M_{21} = -56$ $M_{22} = -98$ $M_{23} = -76$ $M_{24} = 112$
$M_{31} = -10$ $M_{32} = -26$ $M_{33} = -16$ $M_{34} = 20$
$M_{41} = 8$ $M_{42} = 14$ $M_{43} = 6$ $M_{44} = -16$

Minor-minor matriks **C** :

$M_{11} = 10$ $M_{12} = 4$ $M_{13} = 28$
$M_{21} = -56$ $M_{22} = -12$ $M_{23} = 3$
$M_{31} = 22$ $M_{32} = -26$ $M_{33} = -8$

3. Matriks kofaktor :

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 26 & -37 & 11 \\ 5 & -5 & -5 \\ -5 & 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad (C_{ij}) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 28 \\ 30 & -12 & -3 \\ 22 & 26 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(B_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -12 & -15 \\ 56 & -98 & 76 & 112 \\ -10 & 26 & -16 & -20 \\ -8 & 14 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

4. $$\text{adj. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 26 & 5 & -5 \\ -37 & -5 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{adj. } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 22 \\ -4 & -12 & 26 \\ 28 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj. } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 56 & -10 & -8 \\ 11 & -98 & 26 & 14 \\ -12 & 76 & -16 & -6 \\ -15 & 112 & -20 & -16 \end{bmatrix}$$

5. $$\text{adj. } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 13 & -10 \\ -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{adj. } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -13 \\ -7 & -3 & 11 \\ -9 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj. } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

PEMBALIKAN MATRIKS (Halaman 327)

1. Determinan = 1, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determinan = 1, $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determinan = 0, balikannya tak ada.

4. Determinan = -1, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Determinan = 0, balikannya tak ada.

6. Determinan = -24, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -17/24 & 1/8 & 13/24 \\ 7/24 & 1/8 & -11/24 \\ 3/8 & -1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$

7. Determinan = 1, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 1 \\ -15 & 11 & -1 \\ 11 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

8. Determinan = 34, $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/34 & 28/17 & -5/17 & -4/17 \\ 11/34 & -49/17 & 13/17 & 7/17 \\ -6/17 & 38/17 & -8/17 & -3/17 \\ -15/34 & 56/17 & -10/17 & -8/17 \end{bmatrix}$

9. Determinan = 0, balikannya tak ada

10. Determinan = 0, balikannya tak ada

SISTEM PERSAMAAN LINEAR (Halaman 331)

1. $x_1 = 5$, $x_2 = 8$
2. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
3. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$
4. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$
5. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

ANALISIS MASUKAN-KELUARAN (Halaman 340)

1. (a)

$a_{11} = 11/41$	$a_{12} = 19/240$	$a_{13} = 1/185$
$a_{21} = 5/41$	$a_{22} = 89/240$	$a_{23} = 40/185$
$a_{31} = 5/41$	$a_{32} = 37/240$	$a_{33} = 37/185$
$a_{41} = 20/41$	$a_{42} = 95/240$	$a_{43} = 107/185$

   (b) Keluaran total yang baru bagi sektor :
   Pertanian = 78, Industri = 389 dan Jasa = 144.

   (c) Nilai tambah yang baru bagi sektor :
   Pertanian = 38, Industri = 154 dan Jasa = 83.

2. Keluaran total yang baru bagi sektor :
   Pertanian = 80, Industri = 338 dan Jasa = 236.

3. (a)

$a_{11} = 1/4$	$a_{12} = 1/4$	$a_{13} = 1/3$
$a_{21} = 1/4$	$a_{22} = 1/2$	$a_{23} = 1/5$
$a_{31} = 1/4$	$a_{32} = 1/4$	$a_{33} = 1/3$
$a_{41} = 1/4$	$a_{42} = 0$	$a_{43} = 2/15$

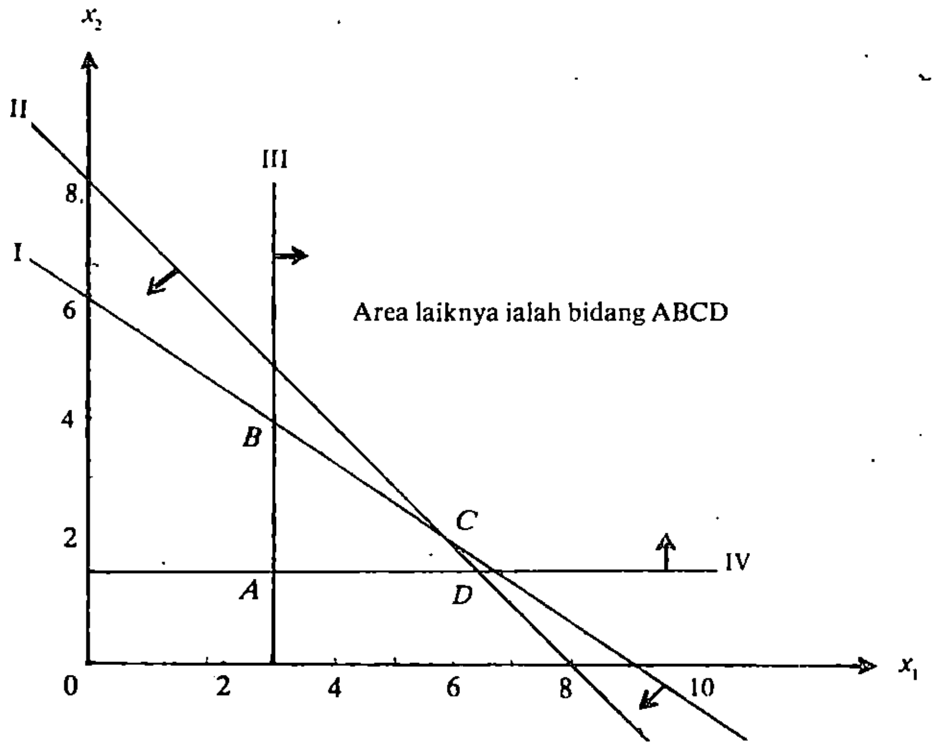
   (b) Keluaran total yang baru bagi sektor A = 469,56; sektor B = 542,61 dan sektor C = 469,56.

   (c) Perubahan nilai tambah
   sektor A = 37,39; sektor B = 0 dan sektor C = 22,61.

4. Kenaikan atau penurunan keluaran total pada sektor A = 161,74; pada sektor B = 69,57 dan pada sektor C = 71,74.

PROGRAMASI LINEAR (Halaman 379)

1.



2. (a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, z maks. = 26
   (b) $a = 4$, $b = 12$, z maks. = 7200
   (c) $a = 4$, $b = 12$, z min. = 7200
   (d) $x = 4$, $y = 2$, z min. = 66

3. Andaikan z : penerimaan penjualan per minggu (rupiah)
   x_1 : jumlah kamera Potret-1 yang diproduksi per minggu
   x_2 : jumlah kamera Potret-2 yang diproduksi per minggu
   x_3 : jumlah kamera Potret-3 yang diproduksi per minggu
   maka rumusan model programasi linearnya adalah :

   Maksimumkan $z = 40.000\,x_1 + 50.000\,x_2 + 75.000\,x_3$

   terhadap

$$x_1 \geq 25$$
$$x_2 \geq 100$$
$$x_3 \geq 48$$
$$4\,x_1/12 + 2{,}5\,x_2/12 + 6\,x_3/12 \leq 130$$
$$3\,x_1/12 + 4\,x_2/12 + 9\,x_3/12 \leq 170$$
$$1\,x_1/12 + 2\,x_2/12 + 4\,x_3/12 \leq 52$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. A = 120 unit, B = 60 unit, laba maksimum = Rp 1,32 juta.

5. Roti kualitas I = 200 unit, roti kualitas II = 100 unit, keuntungan maksimum = Rp 80 ribu per hari.

6. 25 unit ban luar dan 150 unit ban dalam, dengan keuntungan maksimum Rp 55.000,00 per hari.

7. Prima = 200, Utama = 65, Unggul = 120 dan Keuntungan = Rp 5.375,00 per minggu.

8. Jawa = 3000, Sumatera = 5000, Sulawesi = 2000, biaya kirim total (minimum) = Rp 960 ribu.

9. $x_1 = 380{,}00$ $\quad x_7 = 46{,}67$
   $x_2 = 123{,}33$ $\quad x_8 = 70{,}00$
   $x_3 = 80{,}00$ $\quad x_9 = 46{,}67$
   $x_4 = 43{,}33$ $\quad x_{10} = 70{,}00$
   $x_5 = x_6 = 0$ $\quad z$ maksimum = 63.760,16

10. $x_1 = 0{,}2593$ $\quad x_2 = 0{,}7037$ $\quad x_3 = 0{,}0370$ $\quad x_4 = 0$
    z minimum = 511,12

TEORI PERMAINAN (Halaman 399)

1. Terdapat titik pelana, permainan bersaing ketat. Strategi optimum bagi X adalah strategi 1 dan Y juga strategi 1, sedangkan nilai permainan adalah 5. Permainan cenderung menguntungkan X.
2. Tidak terdapat titik pelana, permainan tidak bersaing ketat.
3. Terdapat titik pelana, permainan bersaing ketat. Strategi optimum bagi X adalah strategi 1 dan bagi Y adalah strategi 3, sedangkan nilai permainan adalah —8. Permainan cenderung menguntungkan Y.
4. Tidak terdapat titip pelana, permainan tidak bersaing ketat.
5. Terdapat titik pelana, permainan bersaing ketat. Strategi optimum bagi X adalah strategi 2 dan bagi Y adalah strategi 1, sedangkan nilai permainan adalah 4. Permainan cenderung menguntungkan X.
6. Tidak terdapat titik pelana, permainan tidak bersaing ketat.
7. Terdapat titik pelana, permainan bersaing ketat. Strategi optimum bagi X adalah strategi 3 dan bagi Y adalah strategi 2, sedangkan nilai permainan adalah 18. Permainan cenderung menguntungkan X.
8. Tidak terdapat titik pelana, permainan tidak bersaing ketat.

9. Terdapat titik pelana, permainan bersaing ketat. Strategi optimum bagi X adalah strategi 3 dan bagi Y adalah strategi 4, sedangkan nilai permainan adalah 25. Permainan cenderung menguntungkan X.

10. Tidak terdapat titik pelana, permainan tidak bersaing ketat.

11. $p_1 = 1/3$, $p_2 = 2/3$, $q_1 = 5/9$, $q_2 = 4/9$.
Nilai permainan adalah 57/9, permainan cenderung menguntungkan X.

12. $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/2$. Nilai permainan adalah 1, permainan cenderung menguntungkan X.

13. $p_1 = 2/9$, $p_2 = 7/9$, $q_1 = 5/9$, $q_2 = 4/9$.
Nilai permainan adalah 71/9, permainan cenderung menguntungkan X.

14. $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$, $q_1 = 7/15$, $q_2 = 8/15$.
Nilai permainan adalah —2/3, permainan cenderung menguntungkan Y.

15. $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/2$, $q_1 = 7/8$, $q_2 = 1/8$.
Nilai permainan adalah —13, permainan cenderung menguntungkan Y.

SOAL-SOAL UJIAN SEMESTER

Fakultas Ekonomi
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1987–1988

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Rabu, 9 Maret 1988
Waktu	:	100 menit

---

1. Hubungan antara penerimaan penjualan (*sales revenue, S*) sebuah perusahaan dengan biaya pengiklanannya di majalah "Tempo" (*T*) dan "Editor" (*E*) ditunjukkan oleh persamaan:

$$S = \left[\frac{200T}{5 + T} + \frac{100\,E}{10 + E} \right]$$

Besarnya profit netto adalah 1/5 dari penerimaan penjualan dikurangi biaya pengiklanan. Anggaran pengiklanan yang disediakan sebesar 25. Tentukan bagaimana perusahaan harus mengalokasikan anggaran pengiklanan tersebut agar profit nettonya maksimum. Kemudian, hitunglah besarnya profit netto maksimum tersebut!

2. Andaikan:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

a) **CBA**
b) **CB + A**
c) **B'CA'**

3. Kepuasan *Ida Iasha* dari membintangi dua jenis film ditunjukkan oleh persamaan utilitas total $U = kd^2 - 10k$ (k melambangkan jumlah film komedi, d melambangkan jumlah film drama). Untuk membintangi setiap film komedi dibutuhkan waktu 2 minggu, sedangkan untuk membintangi setiap film drama diperlukan waktu 8 minggu. *Ida* sudah memutuskan bahwa, untuk 3 tahun mendatang ini, ia tidak akan mencurahkan waktu lebih dari 116 minggu untuk membintangi kedua jenis film tersebut. Berapa curahan waktu yang paling optimal dijatahkannya untuk membintangi masing-masing jenis film agar kepuasannya maksimum? Hitunglah nilai kepuasan maksimum tersebut!

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1987–1988

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Rabu, 25 Mei 1988
Waktu	:	100 menit

---

1. Permintaan akan barang A, B dan C masing-masing ditunjukkan oleh persamaan-persamaan berikut:

$$Q_a P_a^{3} P_b^{-2} P_c - 1 = 0 \qquad Q_b P_a^{3} P_b P_c^{-2} - 0{,}5 = 0 \qquad Q_c P_a^{-2} P_b^{-2} P_c - 2 = 0$$

dalam hal ini Q melambangkan kuantitas yang diminta, sedangkan P melambangkan harga barang per unit.

a) Jelaskan sifat permintaan akan masing-masing barang; apakah elastis, elastis-uniter, ataukah in-elastis!

b) Jelaskan pula hubungan-hubungan antara A dan B, antara A dan C, serta antara B dan C; apakah substitutif, independen ataukah komplementer!

2. a) Sebutkan 5 dari 12 sifat determinan yang saudara ketahui!

b) Sebutkan 3 dari 5 sifat matriks-balikan (*inverse*)!

c) Sebutkan 3 cara penyelesaian sistem persamaan linear (n persamaan dalam n variabel) secara serempak/simultan!

3. Susunlah balikan (*inverse*) dari matriks-matriks di bawah ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 16 & 8 & 10 \\ 6 & 14 & -7 & 4 & -4 \\ -9 & 0 & 24 & -6 & 13 \\ 15 & 7 & -1 & 10 & -2 \\ 3 & -8 & 18 & 2 & 17 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 15 & 9 & 8 & 11 & 10 \\ 15 & 30 & 20 & 25 & 10 & 35 \\ -6 & 30 & 18 & 16 & 24 & 0 \\ 19 & 5 & 7 & 11 & 9 & 4 \\ 18 & 36 & 24 & 3 & 12 & 28 \\ 6 & 12 & 8 & 10 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Dengan menggunakan prosedur standar (metoda eliminasi *Gauss*), hitunglah x, y dan z dari sistem persamaan linear berikut:

$$x + y - z = 6; \qquad 3x - 4y + 2z = -2; \qquad 2x + 5y + z = 0.$$

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1988-1989

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Sabtu, 1 Oktober 1988
Waktu	:	90 menit

1. Jelaskan kapan sebuah persamaan $f(x, y) = 0$ akan simetrik terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal! Berdasarkan argumentasi di atas, selidikilah kesimetrian kurva persamaan $x^3 - y^2 = 0$ terhadap sumbu x, sumbu y dan titik pangkal!

2. Menurut catatan Kantor Perdagangan, data mengenai harga *"mainan orang jompo"* per unit, jumlah yang disediakan oleh produsen untuk dijual, dan jumlah yang dibeli konsumen selama semester pertama 1988 tercatat sebagai berikut:

Bulan	Jan.	Febr.	Maret	April	Mei	Juni
Harga per Unit (Rp)	90	100	120	110	125	150
Disediakan produsen	30	50	90	70	100	150
Dibeli konsumen	230	200	140	170	125	50

   a) Seandainya tingkat harga pasar yang berlaku adalah Rp 123,00 per unit, berapa unit yang akan disediakan oleh produsen untuk dijual, dan berapa unit yang akan dibeli konsumen?

   b) Pada tingkat harga dan kuantitas berapa keseimbangan pasar akan tercipta?

3. Secara nasional, masyarakat di sebuah negara menambah konsumsinya 64 miliar untuk setiap tambahan pendapatan sebesar 80 miliar. Pemerintah negara yang bersangkutan bermaksud hendak menaikkan tingkat pendapatan nasionalnya dari 14 triliun menjadi 15 triliun. Untuk itu, dilakukan penambahan investasi sebesar 250 miliar. Bagaimana menurut pendapat saudara keputusan pemerintah tersebut?

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1988–1989

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Sabtu, 10 Desember 1988
Waktu	:	100 menit

---

1. Menurut Lembaga Penelitian "*For Cash*", besar kecilnya hadiah yang diperoleh seseorang dari membeli TSSB dan Kupon SOB dicerminkan oleh persamaan $H = 4000T^{3/5}K^{2/5}$ (H melambangkan besarnya hadiah). Harga selembar TSSB dan KSOB masing-masing Rp 3.000,00 dan Rp 1.000,00. Jika seseorang menganggarkan Rp 165.000,00 untuk membeli kedua kupon undian itu, berapa lembar masing-masing kupon sebaiknya dibeli agar hadiah yang diperolehnya maksimum? Berapa besarnya hadiah maksimum yang akan ia terima? Dengan menganalisis kasus ini, kesimpulan apa yang bisa saudara tarik?

2. a) Selesaikan limit $[(2e^x + e^{-x}) / 3]$ untuk nilai x mendekati 0.
   b) Tentukan apakah fungsi dalam soal a) di atas sinambung untuk semua nilai x ataukah asinambung pada kedudukan x tertentu. Jika asinambung, jelaskan bentuk ketidaksinambungannya!
   c) Tentukan dy/dx untuk $y = x^2 e^{x^2} + 5x - 3$ dan $y = 2x^{e^{2x}}$.

3. Biaya tetap keseluruhan yang dikeluarkan oleh seorang produsen monopolist sebesar 20. Sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan $VC = 0{,}1Q^2 - 4Q$. Berdasarkan pengalamannya, jika harga jual barang ditetapkan 10 maka akan terjual 50 unit. Tetapi ia bisa menjual sebanyak 70 unit jika per unit barang dijualnya seharga 6. Sementara itu, pemerintah bermaksud memperoleh pajak secara maksimum dari usaha si monopolist ini. Si monopolist juga bersikeras hendak meraih profit maksimum meskipun usahanya dipajaki secara optimum oleh pemerintah. Berapa tarif pajak optimum yang harus ditetapkan pemerintah? Berapa kuantitas-penjualan optimum si monopolist? Berapa harga jual barangnya per unit, dan berapa profit maksimum yang diperolehnya?

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1988–1989

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Sabtu, 8 Maret 1989
Waktu	:	105 menit

---

1. Menurut sebuah pengamatan, data mengenai harga jual per unit suatu barang serta jumlah yang ditawarkan dan diminta tercatat sebagai berikut:

Harga	0	5	10	15	20	25
Penawaran	–100	0	100	200	300	400
Permintaan	200	175	150	125	100	75

Berdasarkan data tersebut, hitunglah masing-masing surplus konsumen (Cs) dan surplus produsennya (Ps); kemudian tunjukkan hasil-hasil perhitungan saudara pada sebuah grafik!

2. Jelaskan perbedaan antara Matriks Diagonal, Matriks Skalar dan Matriks Identitas, serta berikan masing-masing sebuah contoh!

3. Tunjukkan masing-masing sebuah contoh dari Matriks Simetri, Matriks Simetri Miring dan Matriks Ortogonal (semuanya berorde 3 x 3)!

4. Carilah nilai-nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear berikut (dengan memanfaatkan metoda matriks):

$$\begin{aligned} 2x - y - 4z &= 2 \\ x + 3y + 7z &= 5 \\ x - 2y - 5z &= 1 \end{aligned}$$

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1988–1989

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Sabtu, 20 Mei 1989
Waktu	:	110 menit

---

1. Perusahaan "Eksekseks" menghasilkan tiga macam produk; X_1, X_2 dan X_3. Masing-masing produk menggunakan 4 macam masukan dalam proses produksinya yaitu K, L, M dan N. Profit marjin (harga jual minus ongkos produksi rata-rata) produk X_2 adalah 80% dari profit marjin produk X_1, sedangkan profit marjin X_3 adalah setengah profit marjin X_1.

   Dalam rangka upaya perusahaan memaksimumkan profit marjin total, Presiden Direktur perusahaan meminta staf ahlinya untuk menghitung berapa unit masing-masing produk sebaiknya dibuat. Sang staf ahli telah mengerjakan perintah itu, namun belum selesai karena keburu "dibajak" oleh dan pindah ke perusahaan lain. Ia baru mengerjakan sampai tablo berikut:

VD	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	S
z	1	–20	0	20	50	–16	20	10	1.530
x_2	0	0	8	1	0	3	0	0,4	15
s_1	0	4	0	–4	10	4	0	1	24
s_3	0	6	0	4	2	0	12	18	48
x_3	0	0	1	0	8	0,5	0	2	30

   a) Selesaikanlah pekerjaan programasi linear di atas sampai diperoleh tablo terakhir (tablo optimal)!

   Kemudian, berdasarkan tablo optimal yang Saudara peroleh:

   b) Tafsirkanlah arti masing-masing angka pada kolom Solusi!
   c) Tafsirkanlah arti masing-masing angka pada baris pertama (baris z dari kolom-kolom s_1, s_2, s_3 dan kolom s_4!
   d) Berapa rupiah profit marjin masing-masing produk?

2. Hubungan masukan-keluaran antarsektor dalam perekonomian sebuah negara, pada tahun 1989, ditunjukkan oleh matriks transaksi berikut:

	Sektor			Permintaan Akhir	Keluaran Total
	Pertanian	Industri	Jasa		
Pertanian	20	40	10	30	100
Industri	20	100	30	150	300
Jasa	40	60	30	70	200
Masukan Primer	20	100	130	500	750
Keluaran Total	100	300	200	750	1350

Menurut Badan Perencanaan Ekonomi negara tersebut, lima tahun yang akan datang permintaan akhir terhadap masing-masing sektor akan meningkat menjadi 50 (Pertanian), 250 (Industri) dan 100 (Jasa). Sedangkan permintaan akhir terhadap nilai tambah diharapkan meningkat 20 persen.

a) Susunlah matriks transaksi yang baru!
b) Berapa persen pertumbuhan pendapatan nasionalnya rata-rata per tahun?
c) Hitunglah elastisitas produksi setiap sektor berkenaan dengan masukan masing-masing sektor!
d) Sebutkan setidak-tidaknya dua kelemahan analisis masukan-keluaran (*input-output analysis*).

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1989-1990

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Kamis, 21 September 1989
Waktu	:	90 menit

---

1. Perolehan keuntungan kapital (*capital gain*) seorang pialang berpola deret hitung. Pada bulan ke-5 aktivitasnya di Bursa Saham ia beruntung Rp 700 ribu. Selama tujuh bulan pertama, ia meraih keuntungan total sebesar Rp 4,62 juta.

   a) Berapa besar keuntungannya pada bulan pertama aktivitasnya?
   b) Berapa pula keuntungan yang ia peroleh pada bulan ke-10?
   c) Hitunglah keuntungan kapital total pialang tadi selama setahun pertama operasinya di Bursa Saham.

2. Dalam sebuah kontrak pembayaran honorarium penerbitan buku, disepakati bahwa penerbit harus membayar Rp 4 juta kepada pengarang, pada setiap akhir tahun selama jangka waktu 5 tahun berturut-turut. Honorarium buku tadi oleh si pengarang dimaksudkan sebagai cadangan dananya untuk studi di manca negara. Oleh karena itu setiap menerima pembayaran, langsung didepositokannya di bank dengan tingkat bunga 15 persen.

   a) Berapa sesungguhnya jumlah total honorarium tersebut?
   b) Seandainya saudara adalah sang pengarang, dan pihak penerbit menawari untuk men-tunai-kan kewajibannya dengan membayar Rp 15 juta pada saat sekarang (awal tahun pertama), bagaimana keputusan saudara? Mengapa?

3. Seorang calon investor sebuah proyek mengkalkulasi, bahwa proyek tadi selama umur ekonomisnya akan menelan biaya total (meliputi biaya investasi dan biaya operasi) sebesar Rp 400 juta, dan mendatangkan manfaat total senilai Rp 435 juta. Berdasarkan perbandingan ini, ia kemudian memutuskan untuk melaksanakan niat investasinya. Bagaimana pendapat saudara mengenai keputusan calon investor tersebut, benar/tepat ataukah tidak? Jelaskan!

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1989-1990

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Selasa, 28 November 1989
Waktu	:	100 menit

MILIK PERPUSTAKAAN
FAKULTAS EKONOMI
UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA
YOGYAKARTA

1. Tentukan dy/dx untuk keempat persamaan berikut:

   a) $y = x^2 e^{x^2} + 5x - 3$ b) $y = 2x\, e^{2x}$

   c) $x = 4y + 8 - y^{-2}$ d) $xy - x^2 + y^2 = -87$

2. Biaya tahunan suatu proyek yang dibiayai oleh sebuah Pemda, berpola *Gompertzian*. Pada permulaan periode (tahun ke-nol), proyek itu menghabiskan dana sebesar Rp 15 juta, dengan tingkat kenaikan biaya sebesar 20 persen rata-rata per tahun. Karena keterbatasan dana, Pemda menetapkan bahwa biaya proyek tersebut tidak boleh melebihi Rp 25 juta per tahun.

   a) Hitunglah besarnya biaya yang dikeluarkan oleh proyek tersebut pada tahun ke-5!

   b) Berapa biaya total yang dikeluarkan sampai dengan tahun ke-5 tersebut?

3. Biaya tetap keseluruhan yang dikeluarkan oleh seorang produsen monopolist sebesar 30. Sedangkan biaya variabel rata-ratanya ditunjukkan oleh persamaan $AVC = 0{,}1Q - 4$. Reaksi konsumen terhadap tingkat harga yang ditetapkannya, ditunjukkan oleh tabel berikut:

Harga per unit	5	7	10	12	15
Jumlah diminta	75	65	50	40	25

Pemerintah menarik pajak dari setiap unit barang yang dijual oleh monopolist, dan berusaha memaksimumkan penerimaan pajaknya dari pasar barang tersebut. Sementara itu, sang monopolist juga bersikeras hendak meraih profit maksimum meskipun usahanya dipajaki secara optimum oleh pemerintah.

   a) Berapa tarif pajak optimum yang harus ditetapkan oleh pemerintah?

   b) Berapa kuantitas-penjualan optimum si monopolist?

   c) Berapa profit si monopolist yang "hilang" karena dipajakinya barang yang ia pasarkan?

   d) Tunjukkan secara grafik hasil perhitungan pada butir c.

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1989-1990

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Kamis, 15 Maret 1990
Waktu	:	117 menit

1. Sebuah perusahaan menggunakan input M dan input N untuk menghasilkan output Z. Fungsi produksi yang dihadapinya ditunjukkan oleh persamaan:

$$15z = 100 + 0{,}4(m - 5)^2 + 0{,}5\,(n - 3)^2$$

z melambangkan kuantitas output Z, sedangkan m dan n masing-masing mencerminkan kuantitas input M dan N. Harga beli input M dan N masing-masing 8 dan 5 per unit, sedangkan harga jual outputnya 30 per unit.

Berapa unit masing-masing input sebaiknya digunakan agar profit perusahaan itu maksimum? Hitunglah besarnya profit maksimum tersebut.

2. Penerimaan marjinal (*marginal revenue*) seorang produsen ditunjukkan oleh persamaan

$MR = 24 - 8{,}4Q + 0{,}6Q^2$ (Q mencerminkan kuantitas output)

a. Tentukan persamaan permintaannya!
b. Berapa unit barang terjual jika harga jualnya 6 per unit?
c. Berapa unit barang harus dijual agar penerimaan total (*total revenue*) maksimum?
d. Hitunglah besarnya penerimaan total maksimum dan harga jual yang menghasilkan penerimaan total maksimum tersebut!

3. Determinan mempunyai beberapa sifat antara lain:

– Nilainya nol jika unsur-unsur pada salah satu baris/kolom semuanya nol;
– Nilainya nol jika terdapat dua baris/kolom yang unsur-unsurnya sama.

Sebutkan setidak-tidaknya lima sifat lainnya!

4. Tentukan balikan *(inverse)* dari matriks-matriks berikut:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 7 & 2 & 6 \\ 12 & 8 & 16 & 5 & 12 \\ 8 & 6 & 14 & 10 & 9 \\ 9 & 4 & 15 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 1989-1990

Mata Kuliah	:	Matematika II
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Selasa, 5 Juni 1990
Waktu	:	120 menit

---

1. Baik teori Kalkulus Diferensial, Metoda Pengganda *Lagrange*, Metoda *Kuhn-Tucker*, maupun Programasi Linear, sama-sama bermanfaat bagi penyelesaian persoalan optimasi (pencarian nilai-nilai ekstrem, maksimum dan minimum). Akan tetapi mereka sesungguhnya diterapkan pada kasus yang saling berbeda.

   Jelaskan dalam kasus optimasi yang bagaimana masing-masing mereka diterapkan!

2. Menurut seorang pelatih sepakbola, jumlah gol yang diciptakan oleh sebuah kesebelasan dalam suatu pertandingan dipengaruhi oleh "faktor kebugaran-fisik" (F) dan "faktor ketrampilan" (K) para pemain. Baik kebugaran fisik maupun keterampilan dapat dinyatakan dalam ukuran "satuan" tertentu.

   Andaikan dalam pertandingannya melawan "Magister United", kesebelasan "Yogya Palace" harus membayar Rp 5 dan Rp 3 untuk setiap satuan kebugaran-fisik dan ketrampilan yang dicurahkan oleh para pemainnya. Sedangkan fungsi produksi gol kesebelasan "Yogya Palace" ini dicerminkan oleh persamaan $G = F^{5/8}K^{3/8}$; dalam hal ini G melambangkan jumlah gol.

   Jika "Yogya Palace" memutuskan hanya akan membobolkan gawang "Magister United" dengan sebanyak 10 gol saja, berapa satuan masing-masing faktor kebugaran-fisik dan faktor ketrampilan yang harus dicurahkan oleh para pemain "Yogya Palace"?

Koperasi "Triple X" memproduksi tiga macam barang, $x1$ dan $x2$ serta $x3$; masing-masing menghasilkan profit marjin senilai Rp 50, Rp 60, dan Rp 40 (angka-angka dalam ribuan). Untuk membuat setiap unit $x1$ digunakan 2 unit bahan/masukan A, 4 unit bahan B, 3 unit C dan 5 unit D. Pembuatan tiap unit $x2$ memerlukan 4 unit A, 2 unit B, 5 unit C dan 4 unit D. Tiap unit $x3$ terbuat dari hanya masukan A, B dan D masing-masing sebanyak 3, 4 dan 3 unit. Tablo optimal dari penyelesaian masalah Programasi Linear-nya tercatat sebagai berikut:

VD	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	S
z	1	0	0	0	0	4	0	7	1900
x_1	0	1	0	0	0	6	0	-2	12
s_3	0	0	0	0	-3	9	1	0	4
x_2	0	0	1	0	0	4	0	3	15
x_3	0	0	0	1	0	-8	0	2	10
s_1	0	0	0	0	1	5	6	-5	6

a. Rumuskan permasalahan Programasi Linear koperasi ini!

b. Berdasarkan tablo di atas, tariklah simpulan mengenai penyelesaian akhir persoalan yang dihadapinya.

c. Berapa unit bahan/masukan *A*, *B*, *C* dan *D* yang tersedia di koperasi tersebut masing-masing?

d. Sebutkan bahan mana saja yang merupakan "sumberdaya langka" dan yang merupakan "sumberdaya berlebih".

4. Sebutkan selengkap mungkin sifat-sifat dari matriks-balikan (*inverse*) yang saudara ketahui!

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN SISIPAN SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1990–1991

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Selasa, 25 Oktober 1990
Waktu	:	90 menit

---

1. Bila diketahui titik A (–1, 3) dan B (3, —1), maka:
   a) Carilah persamaan garis yang melalui titik A dan B!
   b) Berapa gradien (curam) garis tersebut?
   c) Hitunglah jarak antara titik A dan titik B.
   d) Apakah garis tadi melalui titik $C(1, 1)$ dan D (2, 2)?

2. Kurva penawaran produsen untuk suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $9P - 5Q = 405$. Produsen tersebut menghadapi konsumen yang kebutuhan maksimumnya 50 unit dan bila produsen menjual dengan harga Rp 90,00 maka konsumen tidak ada yang mau membeli barangnya.
   a) Tunjukkan fungsi permintaan yang dihadapi oleh produsen!
   b) Berapakah jumlah dan harga keseimbangannya?
   c) Berapakah penerimaan produsen dari penjualan barangnya?
   d) Apakah fungsi permintaan dan penawaran saling berpotongan tegak lurus?

3. Fungsi permintaan dan penawaran akan suatu jenis barang tertentu ditunjukkan oleh persamaan:

   $Qd = 1500 - 10P$ dan $Qs = 20P - 1200$

   Setiap barang yang dijual dikenakan pajak sebesar Rp 15,00 per unit. Pertanyaan:
   a) Berapakah harga dan jumlah keseimbangan *sebelum* ada pajak?
   b) Berapakah harga dan jumlah keseimbangan *setelah* ada pajak?
   c) Berapakah beban pajak yang ditanggung produsen?
   d) Berapakah penerimaan pemerintah dari pajak?

4. Dari suatu penelitian yang dilakukan terhadap Pak Tulkiyo, diketahui bahwa MPC-nya sebesar 0,75 dan konsumsi minimumnya sebesar Rp 12.000,00 per bulan. Dari data tersebut hitunglah:
   a) Berapa pendapatan impasnya (tabungannya nol)?
   b) Bila tabungannya sebesar Rp 10.000,00 per bulan, berapakah tingkat pendapatannya?
   c) Berapa pula besar konsumsinya pada soal b) di atas?
   d) Gambarkan grafiknya!

FAKULTAS EKONOMI UNIVERSITAS GADJAH MADA YOGYAKARTA
UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 1990–1991

Mata Kuliah	:	Matematika I
Dosen	:	Drs. Dumairy, M.A.
Hari, tanggal	:	Kamis, 13 Desember 1990
Waktu	:	120 menit

---

1. Tentukan dy/dx untuk persamaan-persamaan berikut:
   a) $y = (7x + 10 - 5x^{-1})^3$
   b) $x = 5y + 9 - 3y^{-2}$
   c) $4xy - x^2 + 3y^2 - 60 = 0$
   d) $y = 8x^{e^{5x}}$

2. Seorang importir mengeluarkan biaya sebesar $(0{,}5Q - 20)$ untuk setiap unit barang yang diimpornya; Q melambangkan kuantitas impor. Di samping itu, ia juga harus mengeluarkan biaya sebesar 2200 untuk perawatan aktiva-aktiva tetapnya. Pasar dalam negeri untuk barang yang bersangkutan berstruktur persaingan sempurna, dengan harga jual 100 per unit.
   a) Berapa unit barang harus diimpor/terjual agar keuntungan importir itu maksimum?
   b) Untuk melindungi industri dalam negeri, pemerintah mengenakan bea masuk sebesar 25 atas setiap unit barang yang diimpor. Berapa profit si importir yang "hilang" akibat kebijaksanaan proteksi pemerintah?
   c) Hitunglah nilai penerimaan total pemerintah dari importir tersebut!
   d) Andaikan untuk membatasi impor pemerintah bukan mengenakan bea masuk, melainkan menetapkan harga jual di dalam negeri menjadi 80 per unit barang. Apa yang dialami oleh sang importir? Jelaskan!

3. Biaya total tahunan (dalam jutaan rupiah) yang dikeluarkan oleh sebuah Wartel diketahui berpola seperti "kurva belajar", dan ditunjukkan oleh persamaan:
   $C = 25 - 10e^{-0{,}2t}$ $\quad$ C: biaya
   $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ t: indek tahun
   a) Berapa juta rupiah investasi awalnya?
   b) Hitunglah biaya tahunan yang dikeluarkan oleh Wartel itu pada tahun ke-7 operasinya!
   c) Berapa rupiah kenaikan/penurunan (tegaskan salah satu!) biaya totalnya dari tahun ke-3 ke tahun ke-4?

4. Seorang calon investor memperkirakan bahwa proyek yang akan dibangunnya akan menelan biaya total (meliputi pengeluaran investasi dan pengeluaran operasional) sebesar Rp 820 juta selama umur ekonomisnya (10 tahun), dan mendatangkan manfaat total senilai Rp 850 juta. Berdasarkan perbandingan ini, ia memutuskan untuk melaksanakan rencana investasinya.

   Bagaimana pendapat saudara mengenai keputusan calon investor tersebut, benar/tepat ataukah tidak? Jelaskan!

KEPUSTAKAAN

Black, J. & J.F. Bradley, "Essential Mathematics for Economists", 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1980.

Chiang, Alpha C., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", McGraw-Hill, New York, 1967.

Gilbert, Gary G. & Donald O. Koehler, "Applied Finite Mathematics", McGraw-Hill, New York, 1984.

H. Johannes & Budiono Sri Handoko, "Pengantar Matematika untuk Ekonomi", LP3ES, Jakarta, 1980.

Henderson, J.M. & R.E. Quandt, "Microeconomic Theory: A Mathematical Approach", McGraw-Hill, New York, 1980.

Lial, Margaret L. & Charles D. Miller, "Finite Mathematics", 2nd edition, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1982.

Mizrahi, Abe & Michael Sullivan, "Finite Mathematics with Applications for Business and Social Sciences", 5th edition, John Wiley & Sons, New York, 1988.

Rice, John R., "Matrix Computations and Mathematical Software", McGraw-Hill, New York, 1981.

Weber, Jean E., "Mathematical Analysis: Business and Economic Applications", 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1984.

PERPUSTAKAAN FAKULTAS EKONOMI UII

Mo. Anggota	Tgl. Kembali	Mo. Anggota	Tgl. Kembali
17/175/IE	04 MAY 2018		
17/169/IE	06 AUG 2018		
18/386/A	15 SEP 2018		
18/114/IE	29 SEP 2018		
18/185/IE (manual)	14 JAN 2019		
18/201/AF	24 JAN 2019		
18/163/IE	13 MAR 2019		
19/471/AE	04 SEP 2019		
18/137/M	20 SEP 2019		
16/401/A	02 NOV 2019		
19/245/IE	29 NOV 2019		

Kembalikan tepat pada waktunya

No. Inv.	3100001960008
Klas	519/Dum/ m.8